КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М.**

# НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Київ — 2020

УДК: 517.928.1:517.929:519.87

Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М.

Наукова праця є новим комплексним дослідженням, яке розв'язує важливі актуальні наукові задачі аналізу математичних моделей популяційної динаміки, представлених у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь. Також було досліджено окремі випадки загальної моделі у вигляді систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Результати дозволяють отримати нові знання про предметну область, зокрема — точні розв'язки для окремих випадків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес популяційної динаміки, а також сформулювати для них умови стійкості за першим наближенням в околах особливих точок. Розроблені алгоритми оцінювання параметрів і впливів дають можливість побудови конкретних математичних моделей популяційної динаміки на основі спостережень.

Для фахівців, студентів та викладачів математичних спеціальностей.

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №10 від 27 травня 2020 р.)*

Рецензенти:

А.О. Чикрій, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України, завідувач відділом оптимізації керованих процесів №165 Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

О.Г. Мазко, доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України

# ЗМІСТ

**ВСТУП** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **6**

**Частина I. АНАЛІЗ ПОПУЛЯЦІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В СОЦІУМІ** **14**

**Розділ 1. Аналіз розв'язків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації** . . . . . . . . . . . . . . . . . **16**

1.1. Знаходження умов існування додатних обмежених розв'язків та оцінок розв'язків . . . . . . . . . . . . . 16

1.2. Знаходження точних розв'язків за допомогою методу малого параметру для моделей поширення інформації в соціумі . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

**Розділ 2. Аналіз стійкості за першим наближенням розв'язків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації** . . . . . . . . . . . . . . . . . **55**

2.1. Стійкість за першим наближенням в околах особливих точок в моделях поширення інформації із стаціонарними параметрами . . . . . . . . . . . . . 55

2.2. Стохастична стійкість за першим наближенням в околі особливих точок для моделей поширення інформації . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

**Частина II. ОЦІНЮВАННЯ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ** **77**

**Розділ 3. Оптимальні та гарантовані оцінки нестаціонарних параметрів диференціальних рівнянь** . . . . . . . . . . . . . . **79**

3.1. Випадок неперервних спостережень . . . . . . . . . . . 79
3.2. Випадок дискретних спостережень . . . . . . . . . . . . 90

**Розділ 4. Гарантовані оцінки нестаціонарних параметрів різницевих рівнянь в умовах невизначеності . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100**
4.1. Постановка задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100
4.2. Знаходження гарантованих оцінок параметрів різницевих рівнянь . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
4.3. Інтерполяція параметрів різницевих рівнянь . . . . . 107
4.4. Мінімаксні оцінки параметрів різницевих рівнянь . . 114

**Розділ 5. Оцінки впливів в моделях поширення інформації із нестаціонарними параметрами 119**
5.1. Припущення та позначення . . . . . . . . . . . . . . . 119
5.2. Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників одного інформаційного потоку та відомими параметрами системи . . . . . . . 121
5.3. Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи для одного рівняння . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
5.4. Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи . . . . . . 128

**Розділ 6. Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації зі стаціонарними параметрами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135**
6.1. Припущення та позначення . . . . . . . . . . . . . . . 135
6.2. Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок . . . . . . . . . . . . 137
6.3. Побудова гарантованих прогнозних оцінок . . . . . . 145

**Розділ 7. Гарантовані прогнозні оцінки розв‘язків систем диференціальних рівнянь з динамікою Гомперца . . . . . . . . . . . . 151**
7.1. Припущення та означення . . . . . . . . . . . . . . . . 151
7.2. Методи знаходження прогнозних оцінок для випадку неперервних спостережень . . . . . . . . . 153

7.3. Методи знаходження наближених прогнозних оцінок для випадку неперервних спостережень . . . . . . . . . 158
7.4. Методи знаходження прогнозних оцінок при спостереженнях в дискретні моменти часу . . . . 159
7.5. Методи знаходження наближених гарантованих прогнозних оцінок для випадку дискретних спостережень . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161

**ВИСНОВКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173**

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . . . . . . . 174**

# ВСТУП

Сучасна наука орієнтована на роботу з моделями тих чи інших систем чи явищ, які досліджуються науковцем. У залежності від предметною області для аналізу може бути обрана математична модель, яка дозволяє не тільки змоделювати з тою чи іншою мірою складності конкретний об'єкт, але й імітувати поведінку системи при зміні початкових умов, вливів й т.п.

Успішність розв'язання конкретної прикладної задачі аналізу залежить від вибору моделі й апарату, який би відповідав особливостям досліджуваної проблеми, які можна умовно розділити в залежності від функцій моделювання на чотири загальні класи :

– описові моделі;
– імітаційні моделі;
– оптимізаційні моделі;
– моделі прийняття рішень.

Описові моделі характеризуються наявністю емпіричних даних, містять невелику кількість елементів. Вони базуються на методах теорії ймовірності та статистичної теорії рішень (прийняття рішень в умовах "природної"невизначеності), теорії надійності та теорії масового обслуговування, теорії експертних оцінок [1] — [4].

Оптимізаційні моделі крім рівнянь та нерівностей, що задають предметну область, містять критерій оцінки стану складної динамічної системи, використовують апарат лінійного та динамічного програмування, теорії оптимальних керувань, дискретної оптимізації, включаючи теорію графів [5] — [7].

Моделі прийняття рішень умовно поділяються на моделі індивідуального (багатокритеріальне прийняття рішень) та колективного прийняття рішень, коли теорія ігор використовується при прийнятті рішень в умовах ігрової невизначеності [8] — [13].

Окрему, важливу роль при розробці та аналізі математичних моделей мають імітаційні моделі. Вони дозволяють проводити чисельне моделювання, а також базуються на апараті марківських ланцюгів, скінченних автоматів або методах розподіленого штучного інтелекту, так звані багатоагентні системи [14] —[27], диференціальних рівнянь [28] —[54], різницевих рівнянь [55] — [64].

Переважна більшість моделей описують лінійні залежності в системах, й тим самим вони спрощують математичний опис предметною області. Але для таких моделей проведено багато досліджень, й тому їх зручно використовувати для прикладних досліджень.

Результати математичного моделювання з використанням нелінійних моделей претендують на кращий опис складних систем, які зазвичай мають саме нелінійну динаміку.

У даній роботі досліджуються нелінійні задачі популяційної динаміки.

Динаміка популяцій [65] — періодична або неперіодична зміна чисельності, статевого чи вікового складу популяції в результаті дії абіотичних (не залежить від чисельності та щільності самої популяції) і біотичних (залежать від чисельності та щільності популяції) чинників. Динаміка популяції визначається внутрішньо популяційними процесами та взаємодією популяцій різних видів.

Як видно з означення, історично задачі популяційної динаміки відносились до математичної біології (задачі моделювання процесів у біологічних системах, зокрема моделювання динаміки чисельності особин в цій системі або поширення захворювань). Але останніми роками набувають актуальності дослідження популяційних процесів в соціо-комунікативному просторі (наприклад, моделі поширення інформації в соціальних групах, моделі інформаційного протиборства, електоральні моделі й т.п.)

Оскільки наведені процеси є подібними за своєю природою, то для їх моделювання можна використовувати математичні моделі популяційної динаміки, модифікуючи їх для конкретної прикладної області чи задачі.

Оскільки процес поширення інформації подібний з епідеміологічним розповсюдженням захворювань, останні моделі активно застосовуються для розв'язування прикладних задач в інформаційно-комунікативному просторі: Pastor-Satorras R., Vespignani A., Vynnycky E., White R.G., Miller J.C., Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K., Mishra B.K., Saini D.K, Івохіним Є.В. та іншими.

Електоральні моделі розроблялися Фурашевим В.М., Ланде Д.В., Брайчевським С.М., Cederman L.E., Кульбою В.В., Малюгіним В.Д., Шубіним О.Н. та іншими.

Природними виглядають багатоагентні моделі для опису процесів в соціумі, які досліджувалися Нейманом Дж., Губановим Д.О., Новіковим Д.О., Чхартишвілі А.Г., Frantz T., Carley K.M., Wolfram S., Tsvetovat M., Carley K. M., Cederman L.E. та іншими.

Також деякі задачі, що виникають в інформаційно-комунікативному просторі, можна сформулювати у термінах теорії прийняття рішень. Розробкою і аналізом таких моделей займалися Chen X., Jiang N., Jing Y., Stojanovski G., Dimirovski G., Deichman S., Чхартишвілі А.Г., Чикрій А.О., Мащенко С.О., Наконечний О.Г. та інші.

Системи однорідних диференціальних рівнянь для моделювання процесу поширення інформації в соціумі використовували Наконечний О.Г., Зінько П.М., Міхайлов О.П., Петров О.П., Прончева О.Г., Маревцева Н.О., Ізмоденова К.В., Чилачава Т., Кереселідзе Н., Mishra B.K. та інші.

Одним із способів моделювання процесу поширення інформації є системи нелінійних диференціальних рівнянь. Хоч цей підхід і претендує на адекватність отриманих за його допомогою результатів, але нелінійність робить задачу знаходження аналітичних розв'язків таких систем доволі складною, а у окремих випадках, і нерозв'язною. Певні результаті в цьому напрямку були отримані Белманом Р., Bing-ten Zhang, Лєваковим А.А., Шпігельманом Е.С., Олєхніком С.Н. та іншими.

Для імітаційних моделей на основі багатоагентних систем основним є поняття агента.

За [22] агент — це деяка абстрактна сутність, що володіє активністю, автономною поведінкою, може приймати рішення відповідно до деякого набору правил, може взаємодіяти з оточенням та іншими агентами, а також може сама еволюціонувати. Багатоагентні моделі застосовуються з метою отримання уявлення щодо загальної поведінки таких систем, виявити правила функціонування систем з урахуванням припущень про індивідуальну поведінку її окремих агентів. Вона базуються на принципах:

– модель складається з популяції простих агентів;
– не існує єдиного агенту (центру), що направляє інших агентів;

– кожен агент докладно розглядає способи, якими здійснюється проств реакція на локальні зміни в оточенні, включаючи контакти з іншими агентами;
– не існує єдиного правила в системі, яке б описувало глобальну поведінку.

Багатоагентні моделі, на відміну, наприклад, від динамічних моделей є децентралізованими. При цьому складна глобальна поведінка системи є результатом діяльності великої кількості агентів, кожний з яких функціонує за простими правилами, оточений іншими агентами і взаємодіє з ними та із середовіщем. Багатоагентні моделі мають змогу досліджувати досить широке коло проблем, для яких суворі аналітичні методи виявляються неефективними.

Розглянемо імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі систем звичайних диференціальних рівнянь

Оскільки процес поширення інформації має певну динаміку в часі, то доцільною є побудова математичних моделей у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вже напрацьований потужний апарат в теорії диференціальних рівнянь, в силу лінійності вони є зручними для аналізу, але такі моделі претендують лише на наближене відображення процесу обміну інформацією в соціальних групах. Більш адекватними по відношенню до предметної області є математичні моделі, представлені у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь. Але робота з даними моделями є складнішою, наприклад, в загальному випадку такі системи нелінійних диференціальних рівнянь є нерозв'язними аналітично, і тому виникає потреба користуватись чисельними методами, які дають лише наближені результати. Попри все, навіть такі результати дають нову інформацію, яка дає можливість більш глибоко аналізувати і досліджувати процеси в соціо-комунікативний сфері, що, в свою чергу, дозволяє збільшити загальну кількість знань про них.

Розглянемо далі детальніше деякі математичні моделі процесу поширення інформації в соціумі, представлених у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо також математичну модель процесу поширення інформації на основі системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, аналіз якої наведено в роботі [40].

Увівши позначення $x_1(t)$, $t \in (0,T)$ для кількості прихильників однієї з ворогуючих сторін, $x_2(t)$, $t \in (0,T)$ кількість прихильників іншої ворогуючої сторони, $x_3(t)$, $t \in (0,T)$ кількість миротворців, отримаємо модель такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = b_1(t)x_1(t) + b_2(t)x_1(t)x_2(t)- \\ -b_3(t)x_3(t) - \gamma_1(t), x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) = b_4(t)x_2(t) + b_5(t)x_1(t)x_2(t)- \\ -b_6(t)x_3(t) - \gamma_2(t), x_2(0) = x_2^0, \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t)+ \\ +\alpha_3(t)x_3(t), x_3(0) = x_3^0, \end{cases} \quad t \in (0,T), \qquad (1)$$

де $b_i(t)$, $i = \overline{1,6}$, $\alpha_j(t)$, $j = 1,2$, $t \in (0,T)$ — параметри інтенсивності спілкування між різними сторонами-учасниками процесу поширення інформації, а функції $\gamma_j(t)$, $j = 1,2$, $t \in (0,T)$ характеризують механізм забування інформації представниками ворогуючих сторін.

Аналіз окремих випадків системи (1) проводився в роботах [42] і [43].

Ще один вид математичних моделей представлених у формі системи нелінійних диференціальних рівнянь наведено в роботах [44] та [45].

Наведемо далі основні припущення, на основі яких будується модель.

В найпростішому випадку є соціальна спільнота, кількість членів якої $L$ осіб, що потенційно можуть піддатися впливу $N$ не співпадаючих між собою по змісту інформаційних повідомлень типу 1 ($I_1$), типу 2 ($I_2$), ... , типу $N$ ($I_N$)). Нехай в момент часу $t = 0$ всі джерела інформації одночасно починають її транслювати, в результаті чого $N$ інформаційних повідомлень розповсюджуються в середовищі спільноти. Тоді кількість осіб, що засвоїли $i$-е інформаційне повідомлення ($i = \overline{1,N}$), позначимо як $x_i(t)$, $t \in (0,T)$.

Припускаємо, що:

1. кожен з потоків $I_i$, $i = \overline{1,N}$ розповсюджується серед спільноти по двом інформаційним каналам:
   - «зовнішній» по відношенню до спільноти. Інтенсивність розповсюдження інформації по цьому каналу для $I_i$, $i = \overline{1,N}$ характеризується параметром $a_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$;

– «внутрішній» канал — міжособистісне спілкування членів соціальної спільноти (його інтенсивність для $I_i$, $i = \overline{1,N}$ характеризується параметром $b_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$. В результаті такого спілкування люди, що сприйняли повідомлення $I_i$-типу, $i = \overline{1,N}$ (їх число рівне величині $x_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$), впливаючи на ще не охоплених членів соціуму (їх чисельність рівна величині $\left(L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\right)$, $t \in (0,T)$), вносять свій «особистий» вклад в процес поширення інформаційного повідомлення;

2. швидкості зміни числа людей, що сприйняли повідомлення $I_i$-типу, $i = \overline{1,N}$ (тобто число осіб, що сприйняли повідомлення $I_i$-типу, $i = \overline{1,N}$ в момент часу $t \in (0,T)$) складаються з:
   – швидкість зміни числа людей, що сприйняли повідомлення $I_i$-типу ($i = \overline{1,N}$ ) через зовнішній канал, ЗМІ (вона пропорційні добутку інтенсивності зовнішнього впливу $a_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ та числа ще не охоплених членів спільноти $\left(L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\right)$, $t \in (0,T)$), задається функцією $a_i(t)\left(L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\right)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$;
   – швидкість зміни числа людей, що сприйняли повідомлення $I_i$-типу ($i = \overline{1,N}$) через внутрішній канал, міжособистісне спілкування (вона пропорційні добутку інтенсивності міжособистісного спілкування $b_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, числа осіб, що вже засвоїли інформаційне повідомлення $I_i$-типу ($i = \overline{1,N}$ ) та числа ще не охоплених членів спільноти $\left(L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\right)$, $t \in (0,T)$), задається функцією $b_i(t)x_i(t)\left(L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\right)$, $t \in (0,T)$.

Параметри $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ характеризують не тільки інтенсивності інформаційного впливу, але й схильність до його сприйняття. Таким чином, частина спільноти, що на момент часу $t \in (0,T)$ ще не засвоїла жодне з повідомлень (її гіпотетичний «середній» представник, який з самого початку був нейтральним по відношенню до будь-якого з інформаційних повідомлень $I_i$-о типу ($i = \overline{1,N}$) засвоює інформацію тим швидше, чим більші величини $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$). При цьому, навіть якщо, наприклад, вплив інформаційного повідомлення $I_1$-о типу свідомо більше за вплив будь-якого з повідомлень $I_i$-о типу ($i = \overline{2,N}$) (тобто $a_1(t) > a_i(t)$, $b_1(t) > b_i(t)$, $i = \overline{2,N}$, $t \in (0,T)$), частина членів спільноти все одно засвоїть інформаційне повідомлення $I_i$-о типу ($i = \overline{1,N}$) (тобто не має повної монополії одного виду інформації по відношенню до іншої).

На основі вищенаведених припущень отримаємо таку задачу Коші:

$$\dot{x}_i = (a_i(t) + b_i(t)x_i(t))\times$$
$$\times\left(L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\right), x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1,N}, t \in (0,T). \qquad (2)$$

Дослідження моделей типу (2) були проведені в роботах [46] — [53].

Для окремих випадків процесу поширення інформації в соціумі, що характеризуються різким швидким збільшенням прихильників певного інформаційного повідомлення доцільно використовувати моделі поширення інформації з динамікою Гомперца, запропонованих в роботі [54].

Позначивши через $x_i(t)$, $i = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ кількість осіб, що засвоїли $i$-е інформаційне повідомлення ($i = \overline{1,N}$), отримаємо таку модель:

$$\begin{gathered}\dot{x}_i(t) = \left[\left(A(t),e^i\right) + \textstyle\sum_{k=1}^{N}\left(B(t)e^i,e^k\right)\ln x_i(t,f(\cdot))\right] x_i(t,f(\cdot)),\\ x_i(0) = x_i^0 > 0, i = \overline{1,n}, t \in (0,T),\end{gathered} \qquad (3)$$

де $A(t) \in R^N$, $t \in (0,T)$ — матриця інтенсивності зовнішнього впливу, $B(t) \in R^{N\times N}$ — матриця інтенсивності міжособистісного спілкування; вектор $e^i$ — $i$-ий орт, $i = \overline{1,N}$.

Розглянемо імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі систем різницевих рівнянь

Для дослідження процесу поширення інформації в соціумі доцільно використовувати напрацювання теорії різницевих рівнянь. Найчастіше для даної задачі використовують системи різницевих рівнянь, отриманих з систем звичайних диференціальних рівнянь, або епідеміологічні моделі. Останні претендують на адекватне представлення процесів в соціо-комунікативному просторі в силу подібності процесу отримання та передачі інформації з перебігом вірусного захворювання, при якому інфікована людина передає збудник хвороби здоровим представникам популяції.

Одними з найбільш досліджуваними епідеміологічними моделями є SI та SIR, опис яких, наприклад, наведено в роботах [55]—[64].

На основі припущень, які формулюються для епідеміологічних моделей, запропонуємо модель поширення довільної кількості інформаційних повідомлень.

Позначимо через $S(k)$, $k = \overline{0,M}$ — кількість людей, що ще не засвоїли жодного інформаційного повідомлення, в момент часу $k$, $I_j(k)$, $j = \overline{1,N}$, $k = \overline{0,M}$ — кількість людей, що засвоїли $j$-е інформаційне повідомлення ($j = \overline{1,N}$) і поширюють його серед ще не охопленої частини соціуму, в момент часу $k$, $H(k)$, $k = \overline{0,M}$ — кількість осіб, що засвоїли повідомлення, але вже не поширюють його (перехворіли), в момент часу $k$. Тоді отримаємо таку систему різницевих рівнянь.

$$\left\{\begin{array}{l} S(k+1) = (1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k))S(k), \\ I_j(k+1) = \alpha_j(k)S(k)+ \\ +(1-\beta_j(k))I_j(k) + \gamma_1(k)H(k), \\ H(k+1) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(k)I_j(k)+ \\ +(1-\sum_{j=1}^{N} \gamma_j)H(k), \\ S(0) = S^0, I_j(0) = I_j^0, H(0) = H^0, j = \overline{1,N}, \end{array}\right. \qquad k = \overline{0,M-1},$$

де $\alpha_j(k)$, $k = \overline{0,M}$ — інтенсивність, з якою відбувається зараження збудником хвороби в момент $k = \overline{0,M}$, $\beta_j(k)$, $k = \overline{0,M}$ — інтенсивність, з якою відбувається одужання в момент $k = \overline{0,M}$.

# Частина I

# АНАЛІЗ ПОПУЛЯЦІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В СОЦІУМІ

При дослідженні математичних моделей, представлених системами диференціальних рівнянь виникає тривіальна задача знаходження аналітичних розв'язків, а у випадку, коли це неможливо — формулювання умови існування додатних та обмежених розв'язків. Наприклад, вона розглядалась в роботах [77] — [83].

Для систем диференціальних рівнянь спеціального вигляду для знаходження наближених аналітичних розв'язків використовують метод малого параметру Пуанкаре А. Демонстрація використання цього методу продемонстровано, наприклад в [84] — [85].

Також важливою задачею аналізу систем диференціальних рівнянь є знаходження умов, за яких система є стійкою, хоча б за першим наближенням для випадку системи нелінійних диференціальних рівнянь, в околах особливих точок. Ця задача може бути поставлена як для моделей із стаціонарними параметрами [86] — [91], так і для моделей з нестаціонарними параметрами, на які відбувається збурюючий вплив, наприклад, [92] — [96].

Важливою задачею аналізу систем диференціальних рівнянь є знаходження умов, за яких система є стійкою, хоча б за першим наближенням для випадку системи нелінійних диференціальних рівнянь, в околах особливих точок. Ця задача може бути поставлена як для моделей із стаціонарними параметрами [86] — [91], так і для моделей з нестаціонарними параметрами, на які відбувається збурюючий вплив, наприклад, [92] — [96].

# Розділ 1 Аналіз розв'язків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації

Розглядається деяка соціальна група чисельністю $L$ осіб, на яку провадиться інформаційна дія по $N$ каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію $k$-го типу ($k = \overline{1,N}$) залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Якщо позначимо через $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію $k$-го типу ($k = \overline{1,N}$) в момент $t$, через $b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ — інтенсивність спілкування, $u_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ — зовнішні дії, то зміну з часом величини $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ можливо описати системою диференціальних рівнянь вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = b_k(t)x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) +$$
$$+ u_k(t), x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \quad (4)$$

## 1.1 Знаходження умов існування додатних обмежених розв'язків та оцінок розв'язків

### 1.1.1 Аналіз базової моделі

Будемо досліджувати систему (4) при нестаціонарних параметрах і зовнішніх керуваннях, які є програмними або з оберненим зв'язком спеціального вигляду.

**Теорема 1.** *Нехай для параметрів системи (4) виконуються умови $b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ неперервні функції на $[0,T]$, а $u_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ невід'ємні та неперервні на $[0,T]$ функції; виконуються нерівності $x_k(0) = x_k^0 > 0$, $k = \overline{1,N}$ та $L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \geq 0$, $t \in (0,T)$.*

*Тоді для розв'язків системи (4) справедливі співвідношення:*

$$0 < x_k(t) \le d_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

*де*

$$d_k(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t \bar{b}_k(s)ds\right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \bar{b}_k(s)ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$\bar{b}_k(t) = b_k(t)(L - \tilde{z}^{-1}(t)), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$\tilde{z}(t) = x^{-1}(0)\exp\left\{-L\int_0^t c(s)ds\right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{-L\int_\tau^t c(s)ds\right\} c(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t), t \in (0,T), c(t) = \min_{1\le k\le N} b_k(t), t \in (0,T).$$

*Доведення.* Оскільки справедливі оцінки:

$$\dot{x}_k(t) \ge b_k(t)x_k(t)(L - x(t)), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

то в силу леми Гроноулла-Беллмана отримаємо нерівності:

$$x_k(t) \ge x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b_k(s)(L - x(s))ds\right\} > 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Далі зазначимо, що виконуються співвідношення:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N b_k(t)x_k(t)(L - x(t)) + \sum_{i=1}^N u_k(t) \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^N b_k(t)x_k(t)(L - x(t)) \ge c(t)x(t)(L - x(t)), t \in (0,T).$$

Останній вираз можна представити у вигляді:

$$-\frac{1}{x^2(t)}\dot{x}(t) \le -\frac{c(t)}{x(t)}(L - x(t)), t \in (0,T). \qquad (5)$$

Уведемо позначення $z(t) = \frac{1}{x(t)}$, $t \in (0,T)$, тоді з (5) отримаємо нерівність:

$$\dot{z}(t) \leq -Lc(t)z(t) + c(t), z(0) = x^{-1}(0). \tag{6}$$

Використаємо лему Гроноулла-Беллмана до (6) і матимемо вираз:

$$z(t) \leq z(0) \exp\left\{-L\int_0^t c(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{-L\int_\tau^t c(s)ds\right\} c(\tau)d\tau = \tilde{z}(t), t \in (0,T).$$

Таким чином для системи (4) одержимо:

$$\dot{x}_k(t) = Lb_k(t)x_k(t) - b_k(t)x(t)x_k(t) + u_k(t) =$$

$$= b_k(t)(L - z^{-1}(t))x_k(t) + u_k(t) \leq$$

$$\leq b_k(t)(L - \tilde{z}^{-1}(t))x_k(t) + u_k(t) =$$

$$= \bar{b}_k(t)x_k(t) + u_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Тоді в силу леми Гроноулла-Беллмана справедлива оцінка:

$$x_k(t) \leq x_k^0 \exp\left\{\int_0^t \bar{b}_k(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \bar{b}_k(s)ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

що і потрібно було довести. □

*Наслідок* 1. Нехай для параметрів системи (4) виконуються умови $b(t) = b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, тоді виконуються рівності:

$$x_k(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b(s)(L - x(s))ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b(s)(L - x(s))ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Тут $x(t)$, $t \in (0,T)$ є розв'язком рівняння Ріккаті вигляду:

$$\dot{x}(t) = Lb(t)x(t) - b(t)x^2(t) + u(t), t \in (0,T), \tag{7}$$

з початковою умовою:

$$x(0)=\sum_{i=1}^{N} x_k^0, u(t)=\sum_{k=1}^{N} u_k(t), t\in(0,T).$$

Уведемо позначення $y(t)=L-x(t)$, $t\in(0,T)$.

*Наслідок* 2. Для функції $y(t)$, $t\in(0,T)$, якщо для параметрів системи (4) виконуються умови $b(t)=b_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$, $b(t)$ невід'ємна та неперервна на $[0,T]$ функція, справедлива нерівність:

$$\dot{y}(t)=-b(t)(L-y(t))y(t)-\sum_{i=1}^{N} u_i(t)=$$

$$=b(t)y^2(t)-Lb(t)y(t)-\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\geq$$

$$\geq -Lb(t)y(t)-\sum_{i=1}^{N} u_i(t), t\in(0,T),$$

Звідси одержимо оцінку:

$$y(t)\geq y(0)\exp\left\{-\int_0^t Lb(s)ds\right\}-$$

$$-\int_0^t \exp\left\{-\int_0^t Lb(s)ds\right\}u(\tau)d\tau, t\in(0,T),$$

де

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N} u_i(t), t\in(0,T), y(0)=L-x(0).$$

**Теорема 2.** *Нехай для параметрів системи (4) виконуються умови* $b(t)=b_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$, *причому* $b(t)>0$, $t\in(0,T)$, *а функції* $b(t)$, $t\in(0,T)$ *та* $u_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ *є періодичними з періодом* $T$. *Тоді у системи рівнянь (4) існує єдиний розв'язок, що має вигляд:*

$$x_k(t)=\left[\Phi(T)\int_0^T \exp\left\{\int_\tau^T b(s)y(s)ds\right\}u_k(\tau)d\tau\right]\times$$

$$\times \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b(s)y(s)ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T), \qquad (8)$$

*де*

$$\Phi(T) = \left[1-\exp\int_0^t b(s)y(s)ds\right]^{-1}.$$

*Доведення.* Зауважимо, що оскільки функція $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$, $t\in(0,T)$ є розв'язком рівняння Ріккаті (7), що має єдиний розв'язок, то в силу періодичності коефіцієнтів цього рівняння розв'язок його є періодичним.

Також, функції $x_k(t)$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = b(t)(L-x(t))x_k(t)+u_k(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T), \qquad (9)$$

є періодичними в силу періодичності функцій $b(t)$, $x(t)$, $t\in(0,T)$ та $u_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$.

Тоді з формули Коші для системи (9) одержимо співвідношення:

$$x_k(t) = x_k(0)\exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b(s)y(s)ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \qquad (10)$$

Із умови $x_k(0)=x_k(T)$, $k=\overline{1,N}$, отримаємо рівності:

$$x_k(0) = x_k(0)\exp\left\{\int_0^T b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^T \exp\left\{\int_\tau^T b(s)y(s)ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}.$$

Для останнього виразу справедливо:

$$x_k(0) = \left[1-\exp\left\{\int_\tau^T b(s)y(s)ds\right\}\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \exp\left\{\int_\tau^T b(s)y(s)ds\right\} u_k(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Тоді, підставивши (11) в (10), отримуємо формули (8). □

### 1.1.2 Аналіз моделей із зовнішніми впливами спеціального вигляду

Розглянемо далі випадок, коли в моделі (4) зовнішні впливи вибираються в залежності від стану системи і є пропорціональними числу людей, що ще не засвоїли інформацію з інформаційних джерел, тобто

$$u_k(t) = a_k(t)(L - x(t)), k=\overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Тоді система (4) набуде вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))(L - x(t)), k=\overline{1,N}, t \in (0,T). \tag{12}$$

**Теорема 3.** *Нехай для системи (12) виконуються нерівності* $x_k^0 \geq 0$, $k=\overline{1,N}$, $L - x(0) \geq 0$, *а функції* $a_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ *— неперервні невід'ємні на відрізку* $[0,T]$ *функції, тоді у системи рівнянь (12) існують невід'ємні розв'язки.*

*Доведення.* Для функції $y(t)$, $t \in (0,T)$ справедливе диференціальне рівняння:

$$\dot{y}(t) = (-a(t) - \sum_{i=1}^N b_i(t)x_i(t))y(t), t \in (0,T), \tag{13}$$

де

$$a(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t), t \in (0,T).$$

З формули Коші для рівняння (13) отримаємо вираз:

$$y(t) = y(0)\exp\left\{-\int_0^t a(s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \sum_{i=1}^N b_i(s)x_i(s)ds\right\} \geq 0, t \in (0,T),$$

де

$$y(0) = L - x(0).$$

Тоді для (12) справджується представлення:

$$\dot{x}_k(t) = y(t)(a_k(t) + b_k(t)x_k(t)) \geq$$

$$\geq y(t)b_k(t)x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Таким чином з леми Гроноулла-Беллмана одержимо нерівності:

$$x_k(t) \geq x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b_k(s)y(s)ds\right\} > 0.$$

що і потрібно було показати. □

**Теорема 4.** *Нехай для системи (12) виконуються умови:*

$$\min_{1\leq k\leq N} b_k(t) = \underline{b}(t) < 0, t \in (0,T),$$

$$\max_{1\leq k\leq N} b_k(t) = \overline{b}(t) > 0, t \in (0,T).$$

*Тоді мають місце нерівності:*

$$y(0)\exp\left\{-\int_0^t \overline{c}(s)ds\right\} \leq y(t) \leq$$

$$\leq y(0)\exp\left\{-\int_0^t \underline{c}(s)ds\right\}, t \in (0,T),$$

*де*

$$\underline{c}(t) = a(t) + \underline{b}(t)L, t \in (0,T),$$
$$\overline{c}(t) = a(t) + \overline{b}(t)L, t \in (0,T).$$

*Доведення.* Оскільки функція $y(t)$, $t \in (0,T)$ є розв'язком диференціального рівняння:

$$-\dot{y}(t) = (a(t) + \sum_{i=1}^{N} b_i(t)x_i(t))y(t), t \in (0,T),$$

то справедливі оцінки:

$$(a(t) + \underline{b}(t)(L - y(t)))y(t) \leq -\dot{y}(t) \leq$$

$$\leq (a(t) + \overline{b}(t)(L - y(t)))y(t), t \in (0,T), \tag{14}$$

Підставивши в (14) вирази для $\underline{c}(t)$, $\overline{c}(t)$, $t \in (0,T)$, отримаємо нерівності:

$$\underline{c}(t)y(t) \leq \underline{c}(t)y(t) - \underline{b}(t)y^2(t) \leq -\dot{y}(t) \leq$$

$$\leq \overline{c}(t)y(t) - \overline{b}(t)y^2(t) \leq \overline{c}(t)y(t), t \in (0,T). \tag{15}$$

Застосувавши лему Гроноулла-Беллмана до (15), одержимо вираз:

$$y(0) \exp\left\{-\int_0^t \overline{c}(s)ds\right\} \leq y(t) \leq$$

$$\leq y(0) \exp\left\{-\int_0^t \underline{c}(s)ds\right\}, t \in (0,T),$$

що і треба було довести. □

*Наслідок* 3. Для того, щоб функція $y(t)$, $t \in (0,T)$, що є розв'язком рівняння (13), задовольняла умову:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,$$

достатньо, щоб справджувалась рівність:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \underline{c}(s)ds = \infty.$$

Якщо виконується нерівність:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \underline{c}(s)ds < \infty?$$

то функція $y(t)$, $t \in (0,T)$ обмежена.

**Теорема 5.** *Якщо для системи (12) виконується умова* $\underline{b}(t) > 0$, $t \in (0,T)$, *то для функції* $y(t)$, $t \in (0,T)$, *що є розв'язком рівняння (13), справедливий вираз:*

$$\underline{v}(t) \leq y(t) \leq \overline{v}(t), t \in (0,T),$$

*де*

$$\underline{v}(t) = \left[y^{-1}(0) \exp\left\{\int_0^t \overline{c}(s)ds\right\} - \right.$$

$$- \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \overline{c}(s)ds\right\} \overline{b}(\tau)d\tau\right]^{-1}, t \in (0,T),$$

$$\overline{v}(t) = \left[y^{-1}(0)\exp\left\{\int_0^t \underline{c}(s)ds\right\} - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \underline{c}(s)ds\right\} \underline{b}(\tau)d\tau\right]^{-1}, t \in (0,T).$$

*Доведення.* Поділивши вираз (15) на $y^2(t)$, $t \in (0,T)$, одержимо:

$$\frac{\underline{c}(t)}{y(t)} - \underline{b}(t) \leq -\frac{1}{y^2(t)}\dot{y}(t) \leq \frac{\overline{c}(t)}{y(t)} - \overline{b}(t), t \in (0,T).$$

Уведемо позначення $h(t) = y^{-1}(t)$, $t \in (0,T)$, $h(0) = y^{-1}(0)$, тоді для функції $h(t)$, $t \in (0,T)$ будуть виконуватись оцінки:

$$\underline{c}(t)h(t) - \underline{b}(t) \leq \dot{h}(t) \leq \overline{c}(t)h(t) - \overline{b}(t), t \in (0,T). \tag{16}$$

У силу леми Гроноулла-Беллмана для (16) отримаємо:

$$\overline{v}^{-1}(t) = y^{-1}(0)\exp\left\{\int_0^t \underline{c}(s)ds\right\} -$$

$$- \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \underline{c}(s)ds\right\} \underline{b}(\tau)d\tau \leq h(t) \leq$$

$$\leq y^{-1}(0)\exp\left\{\int_0^t \overline{c}(s)ds\right\} - \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \overline{c}(s)ds\right\} \overline{b}(\tau)d\tau =$$

$$= \underline{v}^{-1}(t), t \in (0,T).$$

Тоді матимемо оцінки:

$$\underline{v}(t) \leq y(t) \leq \overline{v}(t), t \in (0,T),$$

що і потрібно було довести. □

*Наслідок* 4. Нехай параметри системи (12) незалежні від часу, тобто $a_k(t) = a_k$ та $b_k(t) = b_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, тоді для функції $y(t)$, $t \in (0,T)$, що є розв'язком рівняння (13), виконуються оцінки:

$$\left[e^{\overline{c}t}\left(y^{-1}(0) - \frac{\overline{b}}{\overline{c}}\right) + \frac{\overline{b}}{\overline{c}}\right]^{-1} \leq y(t) \leq$$

$$\leq \left[e^{\underline{c}t}\left(y^{-1}(0) - \frac{\underline{b}}{\underline{c}}\right) + \frac{\underline{b}}{\underline{c}}\right]^{-1}, t \in (0,T).$$

*Наслідок* 5. Нехай параметри системи (12) задовольняють умови $b_k(t) = b(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, тоді для функції $y(t)$, $t \in (0,T)$, що є розв'язком рівняння (13), справедлива рівність:

$$y(t) = \left[ y^{-1}(0) \exp\left\{ \int_0^t v(s)ds \right\} - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \exp\left\{ \int_\tau^t v(s)ds \right\} b(\tau)d\tau \right]^{-1}, t \in (0,T),$$

де

$$v(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(t) + b(t)L, t \in (0,T).$$

**Теорема 6.** *Нехай для системи (12) виконуються умови* $b(t) = b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (t_0,T)$. *Тоді функції* $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (t_0,T)$ *знаходяться за формулами:*

$$x_k(t) = x_k^0 \exp\left\{ \int_{t_0}^t b(s)y(s)ds \right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^t a_k(\tau)y(\tau) \exp\left\{ \int_\tau^t b(s)y(s)ds \right\} d\tau, t \in (t_0,T), k = \overline{1,N}, \quad (17)$$

*де*

$$y(t) = y(t_0) \left[ \exp\left\{ - \int_{t_0}^t a(s)ds \right\} + \right.$$

$$\left. + y(t_0) \int_{t_0}^t b(\tau) \exp\left\{ - \int_\tau^t a(s)ds \right\} d\tau \right]^{-1}, t \in (t_0,T),$$

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t) + b(t)L, t \in (t_0,T), y(t_0) = L - \sum_{k=1}^{N} x_k^0.$$

*Доведення.* Для функції:

$$y(t) = L - \sum_{k=1}^{N} x_k(t), t \in (t_0,T).$$

будуть справедливі наступні вирази:

$$\dot{y}(t) = - \sum_{k=1}^{N} \dot{x}_k(t) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} (a_k(t) + b(t)x_k(t)) \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right) =$$

$$= -\left( \sum_{k=1}^{N} a_k(t) + b(t) \sum_{k=1}^{N} x_k(t) \right) \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right) =$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{N} a_k(t) + b(t)(L - y(t)) \right) y(t), t \in (t_0, T).$$

Із останнього виразу одержимо, що диференціальне рівняння для $y(t)$, $t \in (t_0,T)$ є рівнянням Ріккаті:

$$\dot{y}(t) = (a(t) - b(t)y(t))y(t), t \in (t_0,T) \tag{18}$$

з початковими умовами:

$$y(t_0) = L - \sum_{k=1}^{N} x_k^0.$$

Уведемо функцію $z(t) = (y(t))^{-1}$, $t \in (t_0,T)$, і для неї буде справедливий вираз:

$$\dot{z}(t) = -(y(t))^{-2}\dot{y}(t), t \in (t_0,T)$$

Поділимо ліву та праву частини (18) на $\left(-y^{-2}(t)\right)$ і одержимо рівняння:

$$-\frac{1}{y^2}(t)\dot{y}(t) = b(t) - \frac{a(t)}{y(t)}, t \in (t_0,T). \tag{19}$$

З виразу (19) отримаємо задачу Коші для функції $z(t)$, $t \in (t_0,T)$:

$$\dot{z}(t) = b(t) - a(t)z(t), t \in (t_0,T), z(t_0) = y^{-1}(t_0). \tag{20}$$

Застосуємо до виразу (20) формулу Коші:

$$z(t) = z(t_0) \exp\left\{ -\int_0^t a(s)ds \right\} +$$

$$+ \int_0^t b(\tau) \exp\left\{ -\int_\tau^t a(s)ds \right\} d\tau, t \in (t_0,T). \tag{21}$$

Оскільки справедлива рівність

$$y(t) = (z(t))^{-1}, t \in (t_0,T),$$

тоді отримаємо наступну формулу з (91):

$$y(t) = y(t_0)\left[\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right\} + \right.$$

$$\left. + y(t_0)\int_{t_0}^{t} b(\tau)\exp\left\{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right\} d\tau\right]^{-1}, t \in (t_0,T), \qquad (22)$$

Для (12) також буде справедливим представлення:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k(t) + b(t)x_k(t))y(t), t \in (t_0,T), k = \overline{1,N} \qquad (23)$$

$$x_k(t_0) = x_k^0, k = \overline{1,N}.$$

Оскільки (23) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням, то застосуємо до нього формулу Коші:

$$x_k(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} a_k(\tau)y(\tau)\exp\left\{\int_{\tau}^{t} b(s)y(s)ds\right\} d\tau, t \in (t_0,T), k = \overline{1,N}.$$

Теорема доведена. □

**Теорема 7.** *Якщо для системи (12) виконуються умови* $b = b_k(t)$, $a_k = a_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $a = a(t)$, $t \in (t_0,T)$, *тоді функції* $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (t_0,T)$ *обчислюються за формулами:*

$$x_k(t) = [(x_k^0(a - y(t_0)b) - a_k y(t_0))\exp\{(t_0 - t)a\} +$$

$$+ y(t_0)(x_k^0 b + a_k)(a\exp\{(t_0 - t)a\})^{-1}, t \in (t_0,T), k = \overline{1,N}. \qquad (24)$$

*Доведення.* Оскільки параметри системи (12) $b$, $a_k$, $k = \overline{1,N}$ є стаціонарними, то рівність (22) набуде вигляду:

$$y(t) = y(t_0)\left[\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} ads\right\} + \right.$$

$$+y(t_0)\int_{t_0}^{t} b\exp\left\{-\int_{\tau}^{t} ads\right\} d\tau\Bigg]^{-1}, t\in(t_0,T). \qquad (25)$$

Для виразу (25) є справедливими перетворення:

$$y(t)=\frac{y(t_0)}{\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)\int_{t_0}^{t} b\exp\{(\tau-t)a\}\,d\tau}=$$

$$=\frac{y(t_0)}{\exp\{(t_0-t)a\}+\frac{y(t_0)b}{a}\exp\{-at\}\left(\exp\{at\}-\exp\{at_0\}\right)}=$$

$$=\frac{ay(t_0)}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}, t\in(t_0,T).$$

Тоді вираз (17) набуде вигляду:

$$x_k(t)=x_k^0\exp\left\{b\int_{t_0}^{t} y(s)ds\right\}+$$

$$+a_k\int_{t_0}^{t} y(\tau)\exp\left\{b\int_{\tau}^{t} y(s)ds\right\}d\tau, t\in(t_0,T), k=\overline{1,N}. \qquad (26)$$

Розглянемо далі перетворення:

$$\int_{\tau}^{t} y(s)ds=\int_{\tau}^{t}\frac{ay(t_0)ds}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-s)a\}+y(t_0)b}=$$

$$=-y(t_0)\int_{\tau}^{t} d(\exp\{(t_0-s)a\})\times$$

$$\times[\exp\{(t_0-s)a\}\left((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-s)a\}+y(t_0)b\right)]^{-1}=$$

$$=\frac{1}{b}\int_{\tau}^{t}\frac{d((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-s)a\})}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-s)a\}+y(t_0)b}-$$

$$-\int_{\tau}^{t}\frac{d(\exp\{(t_0-s)a\})}{b\exp\{(t_0-s)a\}}=-\frac{1}{b}\ln\left|\exp\{(t_0-s)a\}\right|_{\tau}^{t}+$$

$$+\frac{1}{b}\ln\left|(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-s)a\}+y(t_0)b\right|_{\tau}^{t}=$$

$$=\frac{1}{b}\ln|((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\}\times$$

$$\times[\exp\{(t_0-t)a\}((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\}+$$

$$+y(t_0)b)]^{-1}|, t,\tau \in (t_0,T),$$

тоді формула (26) набуде вигляду:

$$x_k(t) = x_k^0 \exp\left\{ b \ln |\frac{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}{a\exp\{(t_0-t)a\}}|^{\frac{1}{b}} \right\} +$$

$$+a_k \int_{t_0}^{t} \frac{ay(t_0)}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t-\tau)a\}+y(t_0)b} \times$$

$$\times \exp\{\ln|((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\} \times$$

$$\times [\exp\{(t_0-t)a\}((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\}+y(t_0)b)]^{-1}|\Big\} =$$

$$= x_k^0 \left| \frac{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}{a\exp\{(t_0-t)a\}} \right| +$$

$$+a_k a y(t_0) \frac{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}{\exp\{(t_0-t)a\}} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} \exp\{(t_0-\tau)a\}[((a-y(t_0)b) \times$$

$$\times \exp\{(t_0-\tau)a\}+y(t_0)b)^2]^{-1} d\tau, t \in (t_0,T), k=\overline{1,N}.$$

Розглянемо наступні перетворення:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\exp\{(t_0-\tau)a\}\,d\tau}{((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\}+y(t_0)b)^2} = -\frac{1}{a(a-y(t_0)b)} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} \frac{-a(a-y(t_0)b)\exp\{a(t_0-\tau)a\}\,d\tau}{((a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\}+y(t_0)b)^2} =$$

$$= \frac{1}{a(a-y(t_0)b)} \frac{1}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-\tau)a\}+y(t_0)b}\Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{1}{a(a-y(t_0)b)} \left( \frac{1}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b} - \frac{1}{a} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1-\exp\{(t_0-t)a\}}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}, t \in (t_0,T).$$

Тоді для функцій $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ справедливі рівності:

$$x_k(t) = x_k^0 \left| \frac{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}{a\exp\{(t_0-t)a\}} \right| +$$

$$+a_k a y(t_0)\frac{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}{\exp\{(t_0-t)a\}}\times$$

$$\times\frac{1}{a^2}\frac{1-\exp\{(t_0-t)a\}}{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}=$$

$$=x_k^0\left|\frac{(a-y(t_0)b)\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)b}{a\exp\{(t_0-t)a\}}\right|+$$

$$+\frac{a_k y(t_0)}{a}\frac{1-\exp\{(t_0-t)a\}}{\exp\{(t_0-t)a\}}=$$

$$=(x_k^0(a-y(t_0)b)-a_k y(t_0))\exp\{(t_0-t)a\}+y(t_0)(x_k^0 b+a_k)\times$$

$$\times\left[a\exp\{(t_0-t)a\}\right]^{-1},t\in(t_0,T),k=\overline{1,N}.$$

Теорема доведена. □

**Теорема 8.** *Якщо функція $y(t)$, $t\in(0,T)$, що є розв'язком рівняння (13), задовольняє нерівності $\underline{y}(t)\le y(t)\le\overline{y}(t)$, тоді для функцій $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$, що є розв'язками системи (12), справедливі вирази:*

$$\underline{x}_k^{(1)}\le x_k(t)\le\overline{x}_k^{(1)},k\in I_1,t\in(0,T),$$

$$\underline{x}_k^{(2)}\le x_k(t)\le\overline{x}_k^{(2)},k\in I_2,t\in(0,T),$$

$$I_1=\{k:b_k(t)>0,t\in(0,T)\},$$

$$I_2=\{k:b_k(t)<0,t\in(0,T)\}.$$

*Тут*

$$\underline{x}_k^{(1)}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\}a_k(\tau)\underline{y}(\tau)d\tau,k\in I_1,t\in(0,T),$$

$$\overline{x}_k^{(1)}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\}a_k(\tau)\overline{y}(\tau)d\tau,k\in I_1,t\in(0,T),$$

$$\underline{x}_k^{(2)}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\underline{y}(\tau)d\tau, k\in I_2, t\in(0,T),$$

$$\overline{x}_k^{(2)}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\overline{y}(\tau)d\tau, k\in I_2, t\in(0,T).$$

*Доведення.* Розглянемо випадок, коли $k\in I_1$. Для рівнянь:

$$\dot{x}_k(t)=a_k(t)y(t)+b_k(t)y(t)x_k(t), k\in I_1, t\in(0,T),$$

виконуються нерівності:

$$a_k(t)\underline{y}(t)+b_k(t)\underline{y}(t)x_k(t)\le\dot{x}_k(t)\le$$

$$\le a_k(t)\overline{y}(t)+b_k(t)\overline{y}(t)x_k(t), k\in I_1, t\in(0,T).$$

Тоді, в силу леми Гроноулла-Беллмана, одержимо:

$$\underline{x}_k^{(1)}\le x_k(t)\le\overline{x}_k^{(1)}, k\in I_1, t\in(0,T),$$

де

$$\underline{x}_k^{(1)}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\underline{y}(\tau)d\tau, k\in I_1, t\in(0,T),$$

$$\overline{x}_k^{(1)}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\overline{y}(\tau)d\tau, k\in I_1, t\in(0,T).$$

Для випадку $k\in I_2$ справедливі оцінки:

$$a_k(t)\underline{y}(t)+b_k(t)\overline{y}(t)x_k(t)\le\dot{x}_k(t)\le$$

$$\le a_k(t)\overline{y}(t)+b_k(t)\underline{y}(t)x_k(t), k\in I_2, t\in(0,T).$$

Звідси маємо нерівності:

$$\underline{x}_k^{(2)}\le x_k(t)\le\overline{x}_k^{(2)}, k\in I_2, t\in(0,T),$$

де

$$\underline{x}_k^{(2)}(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\overline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\underline{y}(\tau)d\tau, k \in I_2, t \in (0,T),$$

$$\overline{x}_k^{(2)}(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b_k(s)\underline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\overline{y}(\tau)d\tau, k \in I_2, t \in (0,T).$$

□

*Наслідок* 6. Якщо параметри системи (12) задовольняють умови $b_k(t) = b_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ та функції $y(t)$, $t \in (0,T)$, що є розв'язком рівняння (13), задовольняють нерівності $\underline{y}(t) \le y(t) \le$ $\le \overline{y}(t)$, тоді для функцій $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками системи (12), виконуються оцінки:

$$\underline{x}_k^{(1)} \le x_k(t) \le \overline{x}_k^{(1)}, k \in I_1, t \in (0,T),$$

$$\underline{x}_k^{(2)} \le x_k(t) \le \overline{x}_k^{(2)}, k \in I_2, t \in (0,T),$$

$$I_1 = \{k : b_k(t) > 0, t \in (0,T)\}, I_2 = \{k : b_k(t) < 0, t \in (0,T)\}.$$

Тут

$$\underline{x}_k^{(1)}(t) = x_k^0 \exp\left\{b_k \int_0^t \underline{y}(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{b_k \int_\tau^t \underline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\underline{y}(\tau)d\tau, k \in I_1, t \in (0,T),$$

$$\overline{x}_k^{(1)}(t) = x_k^0 \exp\left\{b_k \int_0^t \overline{y}(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{b_k \int_\tau^t \overline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\overline{y}(\tau)d\tau, k \in I_1, t \in (0,T),$$

$$\underline{x}_k^{(2)}(t) = x_k^0 \exp\left\{b_k \int_0^t \overline{y}(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{b_k \int_\tau^t \overline{y}(s)ds\right\} a_k(\tau)\underline{y}(\tau)d\tau, k \in I_2, t \in (0,T),$$

$$\overline{x}_k^{(2)}(t) = x_k^0 \exp\left\{ b_k \int_0^t \underline{y}(s)ds \right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{ b_k \int_\tau^t \underline{y}(s)ds \right\} a_k(\tau)\overline{y}(\tau)d\tau, k \in I_2, t \in (0,T).$$

**Теорема 9.** *Якщо параметри системи (12) задовольняють умови* $b_k(t) = b(t)$ *та* $a_k(t) \geq 0$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, *причому функції* $b(t)$ *та* $a_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ *є періодичними з періодом* $T$. *Тоді система (12) має єдиний додатній періодичний розв'язок, що має вигляд:*

$$x_k(t) = \tilde{x}_k^0 \exp\left\{ \int_0^t b(s)y(s)ds \right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{ \int_\tau^t b(s)y(s)ds \right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

*де*

$$\tilde{x}_k^0 = \left[ 1 - \exp\left\{ \int_0^T b(s)y(s)ds \right\} \right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \exp\left\{ \int_\tau^T b(s)y(s)ds \right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$y(t) = \left[ y^{-1}(0) \exp\left\{ \int_0^t \tilde{a}(s)ds \right\} - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \exp\left\{ \int_\tau^t \tilde{a}(s)ds \right\} b(\tau)d\tau \right]^{-1}, t \in (0,T),$$

$$y^{-1}(0) = \Phi_T^{-1} \int_0^T \exp\left\{ L \int_\tau^T \tilde{a}(s)ds \right\} b(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{a}(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) + b(t)L, t \in (0,T),$$

$$\tilde{\Phi}_T = 1 - \exp\left\{ \int_0^T \tilde{a}(s)ds \right\}.$$

*Доведення.* Функція $y(t)$, $t \in (0{,}T)$ є розв'язком рівняння:

$$\dot{y}(t) = (-\sum_{k=1}^{N} a_k(t) - b(t)(L - y(t))y(t), t \in (0{,}T).$$

Звідси отримаємо рівність:

$$-\frac{1}{y^2(t)}\dot{y}(t) = \tilde{a}(t)\frac{1}{y(t)} - b(t), t \in (0{,}T). \tag{27}$$

За формулою Коші з (27) отримаємо вираз:

$$y^{-1}(t) = y^{-1}(0)\exp\left\{\int_0^t \tilde{a}(s)ds\right\} -$$

$$-\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \tilde{a}(s)ds\right\} b(\tau)d\tau, t \in (0{,}T).$$

З умови $y^{-1}(0) = y^{-1}(T)$ одержимо співвідношення:

$$y^{-1}(0) = \tilde{\Phi}_T^{-1}\int_0^T \exp\left\{L\int_\tau^T \tilde{a}(s)ds\right\} b(\tau)d\tau.$$

Систему (12) можна представити також у вигляді:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k(t) + b(t)x_k(t))y(t), k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T). \tag{28}$$

З формули Коші одержимо, що система (28) має розв'язки:

$$x_k(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t b(s)y(s)ds\right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T).$$

Уведемо позначення $\tilde{x}_k^0 = x_k(0)$, $k = \overline{1{,}N}$, тоді з умови $x_k(0) =$ $= x_k(T)$, $k = \overline{1{,}N}$ одержимо:

$$\tilde{x}_k^0 = \left[1 - \exp\left\{\int_0^T b(s)y(s)ds\right\}\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \exp\left\{\int_\tau^T b(s)y(s)ds\right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T),$$

що і потрібно було довести. $\square$

Розглянемо далі окремий випадок (4), коли зовнішні дії обираються в залежності від стану системи:

$$u_k(t) = a_k(t)(L - x(t)) - c_k(t)x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

тоді одержимо систему:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))y(t) -$$
$$- c_k(t)x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \tag{29}$$

**Теорема 10.** *Нехай для параметрів системи (29) виконуються умови* $a_k(t) \geq 0$, $c_k(t) = c(t), k = \overline{1,N}$, $c(t)$ *невід'ємна функція на* $t \in (0,T)$, $L - x(0) > 0$, *а функції* $a_k(t)$, $b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $c(t)$, $t \in (0,T)$ *неперервні на* $[0,T]$ *функції, тоді у системи (29) існують додатні розв'язки.*

*Доведення.* Для функції $y(t) = L - x(t)$, $t \in (0,T)$ одержимо диференціальне рівняння:

$$\dot{y}(t) = \left( -a(t) - \sum_{i=1}^{N} b_i(t)x_i(t) \right) y(t) +$$
$$+ c(t)(L - y(t)), t \in (0,T). \tag{30}$$

Для (30) справедливі оцінки:

$$\dot{y}(t) = \left( -a(t) - \sum_{i=1}^{N} b_i(t)x_i(t) - c(t) \right) y(t) + c(t)L \geq$$
$$\geq \left( -a(t) - \sum_{i=1}^{N} b_i(t)x_i(t) - c(t) \right) y(t), t \in (0,T).$$

Уведемо позначення:

$$d(t) = -a(t) - \sum_{i=1}^{N} b_i(t)x_i(t) - c(t), t \in (0,T),$$

тоді в силу леми Гроноулла-Беллмана мають місце нерівності:

$$y(t) \geq y(0) \exp \left\{ \int_0^t d(s)ds \right\} \geq 0, t \in (0,T). \tag{31}$$

Для функцій $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками системи (29), отримаємо вирази:

$$\dot{x}_k(t) = a_k(t)y(t) + (b_k(t)y(t) - c(t))x_k(t) \geq$$
$$\geq (b_k(t)y(t) - c(t))x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \quad (32)$$

Позначивши $\tilde{d}_k(t) = b_k(t)y(t) - c(t)$, $t \in (0,T)$, в силу леми Гроноулла-Беллмана з (32) отримаємо нерівності:

$$x_k(t) \geq x_k^0 \exp\left\{\int_0^t \tilde{d}_k(s)ds\right\} > 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

що і потрібно було показати. □

**Теорема 11.** *Нехай для параметрів системи (29) виконуються умови* $a_k(t) \geq 0$, $b_k(t) \geq 0$, $c_k(t) = c(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, $L - x(0) > 0$, *а функції* $a_k(t)$, $b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $c(t)$, $t \in (0,T)$ *неперервні на* $[0,T]$ *функції, тоді для функцій* $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, *що є розв'язками системи (29), справедливі оцінки:*

$$\exp\left\{\int_0^t \tilde{b}_k(s)ds\right\} x_k^0 \leq x_k(t) \leq \exp\left\{\int_0^t \tilde{b}_k(s)ds\right\} x_k^0 +$$
$$+L\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \tilde{b}_k(s)ds\right\} a_k(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

*де*

$$\tilde{b}_k(t) = b_k(t)L - c(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

*Доведення.* Оскільки в силу (31) виконуються нерівності $x_k(t) \geq 0$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, то має місце оцінка $y(t) = L - x(t) \leq L$, $t \in (0,T)$. Звідси для функцій $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками системи (29), одержимо:

$$\dot{x}_k(t) = a_k(t)y(t) + (b_k(t)y(t) - c(t))x_k(t) \leq$$
$$\leq a_k(t)L + (b_k(t)L - c(t))x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \quad (33)$$

Застосувавши лему Гроноулла-Беллмана до (33), отримаємо:

$$x_k(t) \leq \exp\left\{\int_0^t \tilde{b}_k(s)ds\right\} x_k^0 +$$
$$+L\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t \tilde{b}_k(s)ds\right\} a_k(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

□

**Теорема 12.** *Нехай для системи (29) виконуються умови* $a_k(t) \geq 0$, $b_k(t) \geq 0$, $c_k(t) = c(t)$, $k = \overline{1{,}N}$, $t \in (0{,}T), L - x(0) > 0$, *а функції* $a_k(t)$, $b_k(t)$, $k = \overline{1{,}N}$, $t \in (0{,}T)$ *вимірні та обмежені на* $[0{,}T]$ *функції. Тоді на* $[0{,}T]$ *існують додатні розв'язки* $x_k(t)$, $k = \overline{1{,}N}$, $t \in (0{,}T)$ *системи (29), причому мають місце оцінки:*

$$x_k(t) \geq x_k^0 \exp\left\{\int_0^t (b_k(s)\hat{z}^{-1}(s) - c(s)ds\right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (b_k(s)\hat{z}^{-1}(s) - c(s)ds\right\} \times$$

$$\times a_k(\tau)\hat{z}^{-1}(\tau)d\tau, k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T),$$

*де*

$$\hat{z}(t) = \frac{1}{y(0)} \exp\left\{\int_0^t -\hat{a}(s)ds\right\} -$$

$$- \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t -\hat{a}(s)ds\right\} \tilde{b}(\tau)d\tau, t \in (0{,}T),$$

$$\hat{a}(t) = -a(t) - \tilde{b}(t)L - c(t), t \in (0{,}T),$$

$$\tilde{b}(t) = \max(b_1(t), \ldots, b_N(t)), t \in (0{,}T).$$

*Доведення.* Для функції $y(t)$, $t \in (0{,}T)$ отримаємо нерівності:

$$\dot{y}(t) = \left(-a(t) - \sum_{i=1}^{N} b_i(t)x_i(t)\right) y(t) + c(t)(L - y(t)) \geq$$

$$\geq (-a(t) - \tilde{b}(t)(L - y(t)))y(t) - c(t)y(t) + c(t)L \geq$$

$$\geq (-a(t) - \tilde{b}(t)L - c(t))y(t) + \tilde{b}(t)y^2(t) =$$

$$= \hat{a}(t)y(t) + \tilde{b}(t)y^2(t), t \in (0{,}T).$$

Звідси отримаємо вираз:

$$-\frac{1}{y^2(t)}\dot{y}(t) \leq -\hat{a}(t)\frac{1}{y(t)} - \tilde{b}(t), t \in (0{,}T).$$

У силу леми Гроноулла-Беллмана, буде виконуватися нерівність:

$$y^{-1}(t) \leq \frac{1}{y(0)} \exp\left\{\int_0^t -\hat{a}(s)ds\right\} -$$

$$-\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t -\hat{a}(s)ds\right\}\tilde{b}(\tau)d\tau = \hat{z}(t), t\in(0,T).$$

Тоді для функцій $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$, що є розв'язками системи (29), справедливі оцінки:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k(t)+b_k(t)x_k(t))y(t) - c(t)x_k(t) \geq$$

$$\geq a_k(t)\hat{z}^{-1}(t) + (b_k(t)\hat{z}^{-1}(t) - c(t))x_k(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \quad (34)$$

Застосувавши до (34) лему Гроноулла-Беллмана, одержимо вираз:

$$x_k(t) \geq x_k^0 \exp\left\{\int_0^t (b_k(s)\hat{z}^{-1}(s) - c(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (b_k(s)\hat{z}^{-1}(s) - c(s)ds\right\}\times$$

$$\times a_k(\tau)\hat{z}^{-1}(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

що і треба було показати. □

Розглянемо окремий випадок моделі (12) зі стрибками в моменти часу $t_j$, $t_j\in(t_0,T)$, $j=\overline{1,M}$. Тоді зміну з часом величин $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(t_0,T)$ можна описати у вигляді системи:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x}_k(t) = (a_k(t)+b_k(t)x_k(t))\times \\ \times\left(L-\sum_{i=1}^N x_i(t)\right), t\in(t_0,T), t\neq t_j, j=\overline{1,M}, k=\overline{1,N} \\ \Delta x(t)|_{t=t_j} = x_k(t_j+0) - x_k(t_j-0) = \\ = \zeta_{j,k}, j=\overline{1,M}, k=\overline{1,N} \\ x_k(t_0) = x_k^0, k=\overline{1,N}. \end{array}\right. \quad (35)$$

**Теорема 13.** *Нехай для системи (35) виконуються умови* $b(t)=b_k(t)$, $t\in(t_0,T)$, $k=\overline{1,N}$, *тоді функції* $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(t_0,t_{M+1})$, $t_{M+1}=T$ *обчислюються за формулами:*

$$x_k(t) = \left[\ldots\left[x_k^0\exp\left\{\int_{t_0}^{t_1} b(s)y(s)ds\right\}+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1} a_k(\tau)y(\tau)\exp\left\{\int_\tau^{t_1} b(s)y(s)ds\right\}d\tau + \zeta_{1,k}\right]\times$$

$$\times \dots \times \exp\left\{\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} a_k(\tau)y(\tau)\exp\left\{\int_{\tau}^{t_{j-1}} b(s)y(s)ds\right\} d\tau +$$

$$+\zeta_{j-1,k}] \times \exp\left\{\int_{t_{j-1}}^{t} b(s)y(s)ds\right\} + \int_{t_{j-1}}^{t} a_k(\tau)y(\tau)\times$$

$$\times \exp\left\{\int_{\tau}^{t} b(s)y(s)ds\right\} d\tau, t \in (t_{j-1},t_j), j = \overline{1,M+1}, k = \overline{1,N},$$

*де*

$$y(t) = \Bigg[\Bigg(\Bigg[\Bigg(\dots\Bigg[y(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t_1} a(s)ds\right\} +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} b(\tau)\exp\left\{-\int_{\tau}^{t_1} a(s)ds\right\} d\tau\Bigg]^{-1} - \sum_{k=1}^{N}\zeta_{1,k}\Bigg) \times \dots \times$$

$$\times \exp\left\{-\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} a(s)ds\right\} +$$

$$+\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} b(\tau)\exp\left\{-\int_{\tau}^{t_{j-1}} a(s)ds\right\} d\tau\Bigg]^{-1} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\zeta_{j-1,k}\Bigg)\exp\left\{-\int_{t_{j-1}}^{t} a(s)ds\right\} +$$

$$+\int_{t_{j-1}}^{t} b(\tau)\exp\left\{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right\} d\tau\Bigg]^{-1}, t \in (t_{j-1},t_j), j = \overline{1,M+1},$$

$$y(t_0) = L - \sum_{k=1}^{N} x_k^0, a(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t) + b(t)L, t \in (t_0,T).$$

*Доведення.* На основі формули (17) функції $x_k(t)$, $t \in (t_{j-1},t_j)$, $j = \overline{1,M+1}$, $k = \overline{1,N}$ знаходяться за формулами:

$$x_k(t) = x_k(t_{j-1})\exp\left\{\int_{t_{j-1}}^{t} b(s)y(s)ds\right\} + \int_{t_{j-1}}^{t} a_k(\tau)y(\tau)\times$$

$$\times \exp\left\{\int_{\tau}^{t} b(s)y(s)ds\right\} d\tau, t \in (t_{j-1},t_j), k=\overline{1,N}, j=\overline{1,M+1}, \quad (36)$$

де

$$x_k(t_{j-1}) = \left[ \begin{array}{ll} x_k^0, & j=1, \\ x_k(t_{j-1}-0)+\zeta_{j-1,k}, & j=\overline{2,M+1}, \end{array} \right. \quad k=\overline{1,N}.$$

Підставивши вираз $x_k(t_{j-1}-0)$, $j=\overline{2,M+1}$, $k=\overline{1,N}$ в праву частину (36), отримаємо:

$$x_k(t) = \left[ (x_k(t_{j-2})) \exp\left\{\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} b(s)y(s)ds\right\} + \right.$$

$$\left. + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} a_k(\tau)y(\tau) \exp\left\{\int_{\tau}^{t_{j-1}} b(s)y(s)ds\right\} d\tau + \zeta_{j-1,k} \right] \times$$

$$\times \exp\left\{\int_{t_{j-1}}^{t} b(s)y(s)ds\right\} + \int_{t_{j-1}}^{t} a_k(\tau)y(\tau) \times$$

$$\times \exp\left\{\int_{\tau}^{t} b(s)y(s)ds\right\} d\tau, t \in (t_{j-1},t_j), j=\overline{2,M+1}, k=\overline{1,N}.$$

Користуючусь вищенаведеними міркуваннями, отримаємо наступні вирази:

$$x_k(t) = \left[ \ldots \left[ x_k^0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t_1} b(s)y(s)ds\right\} + \right.\right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} a_k(\tau)y(\tau) \exp\left\{\int_{\tau}^{t_1} b(s)y(s)ds\right\} d\tau + \zeta_{1,k} \right] \times$$

$$\times \cdots \times \exp\left\{\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+ \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} a_k(\tau)y(\tau) \exp\left\{\int_{\tau}^{t_{j-1}} b(s)y(s)ds\right\} d\tau +$$

$$+\zeta_{j-1,k}] \times \exp\left\{\int_{t_{j-1}}^{t} b(s)y(s)ds\right\} + \int_{t_{j-1}}^{t} a_k(\tau)y(\tau) \times$$

$$\times \exp\left\{\int_{\tau}^{t} b(s)y(s)ds\right\} d\tau, t \in (t_{j-1},t_j), j=\overline{1,M+1}, k=\overline{1,N}.$$

Теорема доведена. □

*Наслідок 7.* Нехай параметри системи (35) є константами на інтервалаї $t \in (t_{j-1}+0,t_j-0)$, $j=\overline{1,M+1}$ (кусково-постійні функції), тобто $a_k()=a_{j,k}$, $t \in (t_{j-1}+0,t_j-0)$, $j=\overline{1,M+1}$, $b_j=b_{j,k}(t)$, $j=\overline{1,M+1}$, $k=\overline{1,N}$. Тоді функції $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t \in (t_0,T)$ можна знайти з формул:

$$x_k(t)=\Bigg(\Bigg(\dots\Bigg(x_k^0\frac{(\tilde{a}_1-y(t_0)b_1)\exp\{(t_0-t_1)\tilde{a}_1\}+y(t_0)b_1}{\tilde{a}_1\exp\{(t_0-t_1)\tilde{a}_1\}}+$$

$$+\frac{a_{1,k}y(t_0)(1-\exp\{(t_0-t_1)\tilde{a}_1\})}{\tilde{a}_1\exp\{(t_0-t_{j_1})\tilde{a}_1\}}+\zeta_{1,k}\Bigg)\times\dots\Bigg)\times$$

$$\times\frac{(\tilde{a}_{j-1}-y(t_{j-2})b_{j-1})\exp\{(t_{j-2}-t_{j-1})\tilde{a}_{j-1}\}+y(t_{j-2})b_{j-1}}{\tilde{a}_{j-1}\exp\{(t_{j-2}-t_{j-1})\tilde{a}_{j-1}\}}+$$

$$+\frac{\tilde{a}_{j-1,k}y(t_{j-2})(1-\exp\{(t_{j-2}-t_{j-1})\tilde{a}_{j-1}\})}{\tilde{a}_{j-1}\exp\{(t_{j-2}-t_{j_1})\tilde{a}_{j-1}\}}+\zeta_{j-1,k}\Bigg)\times$$

$$\times\frac{(\tilde{a}_j-y(t_{j-1})b_j)\exp\{(t_{j-1}-t)\tilde{a}_j\}+y(t_{j-1})b_j}{\tilde{a}_j\exp\{(t_{j-1}-t)\tilde{a}_j\}}+a_{j,k}y(t_{j-1})\times$$

$$\times\frac{(1-\exp\{(t_{j-1}-t)\tilde{a}_j\})}{\tilde{a}_j\exp\{(t_{j-1}-t)\tilde{a}_j\}},t\in(t_{j-1},t_j),j=\overline{1,M+1},k=\overline{1,N}, \quad (37)$$

де

$$\tilde{a}_j=\sum_{i=1}^{N}a_{j,i}+b_jL,j=\overline{1,M+1}.$$

## 1.2 Знаходження точних розв'язків за допомогою методу малого параметру для моделей поширення інформації в социумі

### 1.2.1 Аналіз моделі із нестаціонарними параметрами

Розглянемо окремий випадок системи (4):

$$\dot{x}_k(t)=(a_k(t)+(b(t)+\varepsilon b_k(t))x_k(t))\times$$

$$\times\left(L-\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\right),k=\overline{1,N},t\in(0,T), \quad (38)$$

з початковими умовами:

$$x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N},$$

де $\varepsilon$ — величина достатнього порядку малості.

**Теорема 14.** *Нехай функції $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ є розв'язками системи (38), тоді мають місце представлення:*

$$x_k(t) = x_k^0(t) \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t y(s)b(s)ds\right\}(a_k(\tau)y(\tau) + \varepsilon b_k(\tau)x_{k0}(\tau)y(\tau)-$$

$$-\varepsilon(a_k(\tau) + b(\tau)x_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau + o(\varepsilon), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

*де*

$$x_{k0}(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k\overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$x_{k1}(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t y(s)b(s)ds\right\}(b_k(\tau)x_{k0}(\tau)y(\tau)-$$

$$-(a_k(\tau) + b(\tau)x_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$z(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (2y(s)b(s) - \hat{a}(s))ds\right\} \times$$

$$\times y(\tau)\sum_{i=1}^N b_i(\tau)x_{i0}(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

$$y(t) = y(0)\left(\exp\left\{\int_0^t \hat{a}(s)ds\right\} -\right.$$

$$\left.-y(0)\int_0^T \exp\left\{\int_\tau^t \hat{a}(s)ds\right\} b(\tau)d\tau\right)^{-1}, t \in (0,T),$$

$$y(0) = L - \sum_{i=1}^N x_i^0,$$

$$\hat{a}(t) = b(t)L + \sum_{i=1}^N a_i(t), t \in (0,T).$$

*Доведення.* Представимо розв'язки системи (38) у вигляді:

$$x_k(t) = x_{k0}(t) + \varepsilon x_{k1}(t) + \varepsilon^2 x_{k2}(t) + \cdots =$$

$$= x_{k0}(t) + \varepsilon x_{k1}(t) + o(\varepsilon), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

де

$$x_{k0}(t) = \left. x_k(t) \right|_{\varepsilon=0}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$x_{k1}(t) = \left. \frac{dx_k(t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

$$x_{k2}(t) = \left. \frac{d^2 x_k(t)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Звідси одержимо такі системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_{k0}(t) = (a_k(t) + b(t)x_{k0}(t)) \times$$

$$\times \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_{i0}(t) \right), k = \overline{1,N}, t \in (0,T), \tag{39}$$

$$x_{k0}(0) = x_k^0, k = \overline{1,N},$$

$$\dot{x}_{k1}(t) = -(a_k(t) + b(t)x_{k0}(t)) \sum_{i=1}^{N} x_{k1}(t) +$$

$$+ (b(t)x_{k1}(t) + b_k(t)x_{k0}(t)) \times$$

$$\times \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_{i0}(t) \right), x_{k1}(0) = 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \tag{40}$$

Розглянемо більш детально систему (39). Уведемо позначення:

$$y(t) = L - \sum_{i=1}^{N} x_{i0}(t), t \in (0,T).$$

Тоді отримуємо диференціальне рівняння:

$$\dot{y}(t) = -\left( \sum_{i=1}^{N} a_i(t) + b(t) \sum_{i=1}^{N} x_{i0}(t) \right) \times$$

$$\times \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_{i0}(t) \right), t \in (0,T), \tag{41}$$

з початковою умовою:

$$y(0) = L - \sum_{i=1}^{N} x_i^0.$$

Рівняння (41) можна представити також у вигляді:

$$\dot{y} = -\left(\sum_{i=1}^{N} a_i(t) + b(t)(L - y(t))\right) y(t), t \in (0,T).$$

Отримаємо рівняння Ріккаті:

$$\dot{y}(t) = b(t)y^2(t) - \hat{a}(t)y(t), t \in (0,T). \tag{42}$$

Для того, щоб знайти розв'язок рівняння (42), зробимо заміну:

$$u(t) = y^{-1}(t), t \in (0,T).$$

Тоді з (42) матимемо:

$$\dot{u}(t) = \hat{a}(t)u(t) - b(t), u(0) = y^{-1}(0), t \in (0,T). \tag{43}$$

У силу формули Коші розв'язок рівняння (43) набуде вигляду:

$$u(t) = y^{-1}(0) \exp\left\{\int_0^t \hat{a}(s)ds\right\} -$$

$$-\int_0^T \exp\left\{\int_\tau^t \hat{a}(s)ds\right\} b(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

і тоді одержимо:

$$y(t) = y(0)\left(\exp\left\{\int_0^t \hat{a}(s)ds\right\} -\right.$$

$$\left. -y(0)\int_0^T \exp\left\{\int_\tau^t \hat{a}(s)ds\right\} b(\tau)d\tau\right)^{-1}, t \in (0,T).$$

Оскільки для системи (39) справедливе також представлення:

$$\dot{x}_{k0}(t) = (a_k(t) + b(t)x_{k0}(t))y(t), x_{k0}(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

то в силу формули Коші отримаємо:

$$x_{k0}(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Розглянемо далі систему (40):

$$\dot{x}_{k1}(t) = -(a_k(t) + b(t)x_{k0}(t))\sum_{i=1}^{N} x_{i1}(t) +$$

$$+(b(t)x_{k1}(t) + b_k(t)x_{k0}(t))y(t), x_{k1}(0) = 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Уведемо заміну:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N} x_{i1}(t), t \in (0,T).$$

Відповідне для функції $z(t)$, $t \in (0,T)$ диференціальне рівняння матиме вигляд:

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1}(t) = -\left(\sum_{i=1}^{N} a_i(t) + b(t)(L - y(t))\right) z(t) +$$

$$+y(t)\left(b(t)\sum_{i=1}^{N} x_{i1}(t) + \sum_{j=1}^{N} b_j(t)x_{j0}(t)\right) =$$

$$= -(\hat{a}(t) - b(t)y(t))z(t) + b(t)y(t)z(t) +$$

$$+y(t)\sum_{j=1}^{N} b_j(t)x_{j0}(t), t \in (0,T).$$

Звідси одержимо задачу Коші:

$$\dot{z}(t) = z(t)(2b(t)y(t) - \hat{a}(t)) +$$

$$+ y(t)\sum_{j=1}^{N} b_j(t)x_{j0}(t), z(0) = 0, t \in (0,T). \tag{44}$$

За формулою Коші розв'язок (44) представимо у формі:

$$z(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (2y(s)b(s) - \hat{a}(s))ds\right\}\times$$

$$\times y(\tau)\sum_{i=1}^{N} b_i(\tau)x_{i0}(\tau)d\tau, t \in (0{,}T).$$

Тоді (40) набуває вигляд системи неоднорідних лінійних рівнянь:

$$\dot{x}_{k1}(t) = b(t)y(t)x_{k1}(t) + b_k(t)y(t)x_{k0}(t) -$$

$$-(a_k(t) + b(t)x_{k0}(t))z(t), x_{k1}(0) = 0{,}k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T). \qquad (45)$$

Отже, за формулою Коші, розв'язок (45) обчислюється за формулою:

$$x_{k1}(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t y(s)b(s)ds\right\}(b_k(\tau)x_{k0}(\tau)y(\tau) -$$

$$-(a_k(\tau) + b(\tau)x_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau{,}k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T).$$

З вищенаведених міркувань одержимо наближений розв'язок для системи (38):

$$x_k(t) = x_k^0(t)\exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t y(s)b(s)ds\right\}(a_k(\tau)y(\tau) + \varepsilon b_k(\tau)x_{k0}(\tau)y(\tau) -$$

$$-\varepsilon(a_k(\tau) + b(\tau)x_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau + o(\varepsilon), k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T),$$

що і потрібно було показати. □

### 1.2.2 Аналіз моделей зі стаціонарними параметрами

Розглянемо систему з стаціонарними параметрами:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k + (b + \varepsilon b_k)x_k(t))\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) +$$

$$+\gamma x_k(t), x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1{,}N}, t \in (0{,}T), \qquad (46)$$

причому $\gamma \neq 0$.

**Теорема 15.** *Нехай* $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ *розв'язки системи (46), тоді має місце представлення:*

$$x_k(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t(by(s)+\gamma)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t(by(s)+\gamma)ds\right\}(a_k(\tau)y(\tau)+\varepsilon b_k y(\tau)x_{k0}(\tau)-$$

$$-\varepsilon(a_k+bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau+o(\varepsilon),k=\overline{1,N},t\in(0,T),$$

*де*

$$x_{k0}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t(by(s)+\gamma)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t(by(s)+\gamma)ds\right\}a_k(\tau)y(\tau)d\tau,k=\overline{1,N},t\in(0,T),$$

$$x_{k1}(t)=\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t(\gamma+by(s))ds\right\}(b_k y(\tau)x_{k0}(\tau)-$$

$$-(a_k+bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau,k=\overline{1,N},t\in(0,t),$$

$$y(t)=\left\{\begin{array}{ll}\bar{y}_1+\frac{\sqrt{D}}{b}(1-c_1e^{\sqrt{D}t})^{-1}, & D>0,\\ \bar{y}_3-(bt+c_2)^{-1}, & D=0,\\ \sqrt{-\frac{D}{4b}}\,\mathrm{tg}\left(t\sqrt{-\frac{D}{4b}}\right)+\bar{y}_3+c_3, & D<0,\end{array}\right.,t\in(0,T),$$

$$z(t)=\sum_{k=1}^N b_k\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t(\hat{a}+2by(s))ds\right\}ds\times$$

$$\times y(\tau)x_{k0}(\tau)d\tau,t\in(0,T),$$

$$\hat{a}=\gamma-bL-\sum_{k=1}^N a_k(t),D=\hat{a}^2+4\gamma bL,$$

$$\bar{y}_1=-\frac{\hat{a}+\sqrt{D}}{2b},\bar{y}_2=-\frac{\hat{a}-\sqrt{D}}{2b},\bar{y}_3=-\frac{\hat{a}}{2b},$$

$$c_1=\frac{y(0)-\bar{y}_2}{y(0)-\bar{y}_1},c_2=(\bar{y}_3-y(0))^{-1},c_3=y(0)-\bar{y}_3,$$

*Доведення.* Представимо розв'язки системи (46) у вигляді:

$$x_k(t) = x_{k0}(t) + \varepsilon x_{k1}(t) + \varepsilon^2 x_{k2}(t) + \cdots =$$
$$= x_{k0}(t) + \varepsilon x_{k1}(t) + o(\varepsilon), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

де

$$x_{k0}(t) = \left. x_k(t)\right|_{\varepsilon=0}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$
$$x_{k1}(t) = \left.\frac{dx_k(t)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$
$$x_{k2}(t) = \left.\frac{d^2x_k(t)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Тоді одержимо системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_{k0}(t) = (a_k + bx_{k0}(t))y(t) +$$
$$+ \gamma x_{k0}(t), x_{k0}(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T), \tag{47}$$

$$\dot{x}_{k1}(t) = -(a_k + bx_{k0}(t))\sum_{i=1}^{N} x_{k1}(t) + (bx_{k1}(t) + b_k x_{k0}(t))y(t) +$$
$$+ \gamma x_{k1}(t), x_{k1}(0) = 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T), \tag{48}$$

де

$$y(t) = L - \sum_{i=1}^{N} x_{i0}(t), t \in (0,T).$$

Диференціальне рівняння функції $y(t)$, $t \in (0,T)$ є рівнянням Ріккаті:

$$\dot{y}(t) = -\sum_{k=1}^{N} \dot{x}_{k0}(t) = -\left(\sum_{k=1}^{N} a_k + b\sum_{k=1}^{N} x_{k0}(t)\right) y(t) -$$
$$-\gamma \sum_{k=1}^{N} x_{k0}(t) =$$
$$= by^2(t) + \hat{a}y(t) - \gamma L, t \in (0,T), \tag{49}$$

з початковою умовою:

$$y(0) = L - \sum_{i=1}^{N} x_k^0.$$

Проаналізуємо розв'язки квадратного рівняння $by^2(t) + \hat{a}y(t) - \gamma L = 0$ в залежності від знаку дискримінанта $D$:

1. Нехай $D > 0$, тоді отримуємо рівняння вигляду:

$$\dot{y}(t) = b(y(t) - \bar{y}_1)(y(t) - \bar{y}_2), t \in (0,T).$$

Його розв'язком буде:

$$y(t) = \bar{y}_1 + \frac{\sqrt{D}}{b}(1 - c_1 e^{\sqrt{D}t})^{-1}, t \in (0,T).$$

2. Нехай $D = 0$, тоді отримуємо рівняння вигляду:

$$\dot{y}(t) = b(y(t) - \bar{y}_3)^2, t \in (0,T),$$

розв'язком якого є

$$y(t) = \bar{y}_3 - (bt + c_2)^{-1}, t \in (0,T).$$

3. Нехай $D < 0$, тоді отримуємо рівняння вигляду:

$$\dot{y}(t) = b\left[(y(t) - \bar{y}_3)^2 - \left(\bar{y}_3^2 + \frac{\gamma L}{b}\right)\right], t \in (0,T).$$

Оскільки $D < 0$, то $\bar{y}_3^2 + \frac{\gamma L}{b} < 0$ і

$$y(t) = \sqrt{-\frac{D}{4b}}\operatorname{tg}\left(t\sqrt{-\frac{D}{4b}}\right) + \bar{y}_3 + c_3, t \in (0,T).$$

Система диференціальних рівнянь (47) набуде вигляду:

$$\dot{x}_{k0}(t) = (by(t) + \gamma)x_{k0}(t)+$$

$$+a_k y(t), x_{k0}(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

розв'язок якої обчислюється за формулами:

$$x_{k0}(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t (by(s) + \gamma)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s) + \gamma)ds\right\} a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Розглянемо далі систему (48):

$$\dot{x}_{k1}(t) = -(a_k + bx_{k0}(t))\sum_{i=1}^{N} x_{i1}(t) + \gamma x_{k1}(t)+$$

$$+(bx_{k1}(t)+b_kx_{k0}(t))y(t), x_{k1}(0)=0, k=\overline{1,N}, t\in(0,T).$$

Уведемо заміну:

$$z(t)=\sum_{i=1}^{N}x_{i1}(t), t\in(0,T),$$

і для цієї функції отримаємо задачу Коші:

$$\dot z(t)=\sum_{i=1}^{N}\dot x_{i1}(t)=z(t)(\hat a+2by(t))+$$

$$+y(t)\sum_{k=1}^{N}b_kx_{k0}(t), z(0)=0, t\in(0,T). \tag{50}$$

Для розв'язку (50) за формулою Коші справедливе представлення:

$$z(t)=\sum_{k=1}^{N}\int_0^t b_k\exp\left\{\int_\tau^t(\hat a+2by(s))ds\right\}y(\tau)x_{k0}(\tau)d\tau, t\in(0,T).$$

Отже, (48) можна представити також у формі системи лінійних неоднорідних рівнянь з початковими умовами:

$$\dot x_{k1}(t)=(\gamma+by(t))x_{k1}(t)+b_ky(t)x_{k0}(t)-$$

$$-(a_k+bx_{k0}(t))z(t), x_{k1}(0)=0, k=\overline{1,N}, t\in(0,T).$$

Тоді $x_{k1}(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ за формулою Коші матимуть вигляд:

$$x_{k1}(t)=\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t(\gamma+by(s))ds\right\}(b_ky(\tau)x_{k0}(\tau)-$$

$$-(a_k+bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,t).$$

Враховуючи вищенаведені міркування, розв'язки системи (46) $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ можна представити у вигляді:

$$x_k(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t(by(s)+\gamma)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s)+\gamma)ds\right\}(a_k(\tau)y(\tau)+\varepsilon b_k y(\tau)x_{k0}(\tau)-$$

$$-\varepsilon(a_k+bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau+o(\varepsilon), k=\overline{1,N}, t\in(0,T).$$

□

Розглянемо окремий випадок (4), коли зовнішні керування набувають вигляду:

$$u_k(t)=\gamma(x_k(t)-m_kL)+a_k\left(L-\sum_{i=1}^N x_i(t)\right), k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

де

$$\sum_{k=1}^N m_k=1, m_k\geq 0, k=\overline{1,N}.$$

Тоді отримаємо систему:

$$\dot{x}_k(t)=(a_k+(b+\varepsilon b_k)x_k(t))\left(L-\sum_{i=1}^N x_i(t)\right)+$$

$$+\gamma(x_k(t)-m_kL), x_k(0)=x_k^0, k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \qquad (51)$$

**Теорема 16.** *Нехай $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ розв'язки системи (51), тоді має місце представлення:*

$$x_k(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t (by(s)+\gamma)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s)+\gamma)ds\right\}(a_k y(\tau)-\gamma m_k L+$$

$$+\varepsilon b_k y(\tau)x_{k0}(\tau)-\varepsilon(a_k+bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

*де*

$$x_{k0}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t (by(s)+\gamma)ds\right\}+$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s)+\gamma)ds\right\}\times$$

$$\times(a_k y(\tau)-\gamma m_k L)d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$x_{k1}(t)=\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s)+\gamma)ds\right\}(b_k y(\tau)x_{k0}(\tau)-$$

$$-(a_k+bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$y(t)=\frac{\hat{a}y(0)}{\hat{a}\exp\{-\hat{a}t\}-by(0)}, t\in(0,T),$$

$$z(t)=\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (2by(s)+\hat{a})ds\right\}\times$$

$$\times y(\tau)\sum_{k=1}^N b_k x_{k0}(\tau)d\tau, t\in(0,T),$$

$$y(0)=L-\sum_{i=1}^N x_k^0, \hat{a}=\gamma-bL-\sum_{k=1}^N a_k.$$

*Доведення.* Представимо розв'язки системи (51) у вигляді:

$$x_k(t)=x_{k0}(t)+\varepsilon x_{k1}(t)+\varepsilon^2 x_{k2}(t)+\cdots=$$

$$=x_{k0}(t)+\varepsilon x_{k1}(t)+o(\varepsilon), k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

де

$$x_{k0}(t)=\left. x_k(t)\right|_{\varepsilon=0}, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$x_{k1}(t)=\left.\frac{dx_k(t)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$x_{k2}(t)=\left.\frac{d^2x_k(t)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}, k=\overline{1,N}, t\in(0,T).$$

Тоді одержимо системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_{k0}(t)=(a_k+bx_{k0}(t))\left(L-\sum_{i=1}^N x_{k0}(t)\right)+$$

$$+\gamma(x_{k0}(t)-m_k L), x_{k0}(0)=x_k^0, k=\overline{1,N}, t\in(0,T), \qquad (52)$$

$$\dot{x}_{k1}(t)=-(a_k+bx_{k0}(t))\sum_{i=1}^N x_{k1}(t)+(bx_{k1}(t)+$$

$$+b_k x_{k0}(t))y(t)+\gamma x_{k1}(t), x_{k1}(0)=0, k=\overline{1,N}, t\in(0,T), \qquad (53)$$

де

$$y(t) = L - \sum_{i=1}^{N} x_{k0}(t),t \in (0,T).$$

Для функції $y(t)$, $t \in (0,T)$ отримаємо диференціальне рівняння:

$$\dot{y}(t) = -\sum_{k=1}^{N} \dot{x}_{k0}(t) = -\left(\sum_{k=1}^{N} a_k + b\sum_{k=1}^{N} x_{k0}(t)\right) y(t) -$$

$$-\gamma\left(\sum_{k=1}^{N} x_{k0}(t) - L\right),t \in (0,T).$$

Тоді отримаємо задачі Коші:

$$\dot{y}(t) = \hat{a}y(t) + by^2(t), t \in (0,T), y(0) = L - \sum_{i=1}^{N} x_k^0. \qquad (54)$$

За формулою Коші розв'язок (54) обчислюється за формулою:

$$y(t) = \frac{\hat{a}y(0)}{\hat{a}\exp\{-\hat{a}t\} - by(0)},t \in (0,T).$$

Тоді систем (52) набувають форми системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_{k0}(t) = (\gamma + by(t))x_{k0}(t) + a_k y(t) -$$

$$-\gamma m_k L, x_{k0}(0) = x_k^0,k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

розв'язок якої знаходиться за формулою Коші у вигляді:

$$x_{k0}(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t (by(s) + \gamma)ds\right\} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s) + \gamma)ds\right\}\times$$

$$\times(a_k y(\tau) - \gamma m_k L)d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Розглянемо систему (53). Уведемо заміну:

$$z(t) = \sum_{k=1}^{N} x_{k1}(t), t \in (0,T).$$

Для функції $z(t)$, $t \in (0,T)$ отримаємо задачу Коші:

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=1}^{N} \dot{x}_{k1}(t) = (2by(t) + \hat{a})z(t) +$$

$$+ y(t) \sum_{k=1}^{N} b_k x_{k0}(t), z(0) = 0, t \in (0,T),$$

розв'язок якої знаходиться у формі:

$$z(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (2by(s) + \hat{a})ds\right\} \times$$

$$\times y(\tau) \sum_{k=1}^{N} b_k x_{k0}(\tau) d\tau, t \in (0,T).$$

Система (53) набуває вигляду системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_{k1}(t) = (by(t) + \gamma)x_{k1}(t) + b_k y(t) x_{k0}(t) -$$

$$-(a_k + bx_{k0}(t))z(t), x_{k1}(0) = 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

розв'язки якої обчислюються за формулами:

$$x_{k1}(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s) + \gamma)ds\right\} (b_k y(\tau) x_{k0}(\tau) -$$

$$-(a_k + bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

З вищенаведених міркувань отримаємо представлення для розв'язків системи (51):

$$x_k(t) = x_k^0 \exp\left\{\int_0^t (by(s) + \gamma)ds\right\} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t (by(s) + \gamma)ds\right\} (a_k y(\tau) - \gamma m_k L +$$

$$+ \varepsilon b_k y(\tau) x_{k0}(\tau) - \varepsilon(a_k + bx_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

що і потрібно було показати. □

# Розділ 2 Аналіз стійкості за першим наближенням розв'язків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації

## 2.1 Стійкість за першим наближенням в околах особливих точок в моделях поширення інформації із стаціонарними параметрами

### 2.1.1 Аналіз базової моделі

Аналізуватимемо випадок, коли параметри системи (5) стаціонарні і зовнішня дія моделюється як $u_k(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i(t) + c_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, тоді отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = b_k x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i(t) + c_k, k = \overline{1,N}, t \in (0,T) \tag{55}$$

з початковими умовами:

$$x_k(t_0) = x_k^0, k = \overline{1,N}.$$

Очевидно, що система диференціальних рівнянь (55) допускає стаціонарні розв'язки $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^*$ (тут $*$ — символ транспонування), що задовольняють умови:

$$\begin{cases} L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} a_{ki}\tilde{x}_i + c_k = 0, k = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{56}$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (56) можна представити у матричному вигляді:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} L \\ -c_1 \\ \dots \\ -c_N \end{array}\right). \qquad (57)$$

Нас цікавлять невід'ємні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь (57). Будемо припускати, що такі розв'язки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)^*$ існують.

Оскільки доцільно досліджувати ту частину площини фазового простору, яка знаходиться в околі точки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)^*$, то для аналізу динаміки системи (55) у околі точки $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)^*$ розглянемо лінійне наближення вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = \sum_{i=1}^{N} (a_{ki} - b_k \tilde{x}_k)(x_i(t) - \tilde{x}_i) +$$

$$+ b_k \left( L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \right) (x_k(t) - \tilde{x}_k), k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Зробимо заміну $\overline{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1, N}$, $t \in (0,T)$, тоді отримуємо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь вигляду:

$$\dot{\overline{x}}_k(t) = \sum_{i=1}^{N} (a_{ki} - b_k \tilde{x}_k) \overline{x}_i(t) +$$

$$+ b_k \left( L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \right) \overline{x}_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \qquad (58)$$

Позначивши $\overline{X}(t) = (\overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_N(t))^*$, систему (58) можна представити у матричному вигляді:

$$\overline{X}'(t) = A\overline{X}(t), t \in (0,T),$$

де

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} - b_1 p_1 & \dots & a_{1N} - b_1 \tilde{x}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} - b_N \tilde{x}_N & \dots & a_{NN} - b_N p_N \end{array}\right).$$

$$p_i = \tilde{x}_i - L + \sum_{j=1}^{N} \tilde{x}_j, i = \overleftarrow{1,N}.$$

**Теорема 17.** *Нехай для системи (55) існує стаціонарної точка* $(\tilde{x}_1, \ \ldots, \ \tilde{x}_N)^*$ *з невід'ємними компонентами, тоді для того, щоб розв'язки даної системи були стійкими в околі стаціонарної точки* $(\tilde{x}_1, \ \ldots, \ \tilde{x}_N)^*$ *за першим наближенням, необхідно, а у випадку при* $N = 4$ *і достатньо, щоб виконувались умови:*

$$\begin{cases} Sp(A) < 0, \\ detA > 0, \\ Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\ (Sp(A))^2 detA - Sp(A^+)(Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0, \end{cases}$$

*де* $A^+$ *— союзна до матриці* $A$, $Sp(A)$ *— слід матриці* $A$, $detA$ *— детермінант матриці* $A$,

$$a_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \left( a_{ii} - b_i \left( \tilde{x}_i - L + \sum_{l=1}^{4} \tilde{x}_l \right) \right) \times$$

$$\times \left( a_{jj} - b_j \left( \tilde{x}_j - L + \sum_{l=1}^{4} \tilde{x}_l \right) \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} (a_{ij} - b_i \tilde{x}_i)(a_{ji} - b_j \tilde{x}_j).$$

*Доведення.* У загальному випадку для системи з чотирьох диференціальних лінійних рівнянь характеристичне рівняння має загальний вигляд вигляду:

$$F(\lambda) = det(\lambda E - A) \ = \lambda^4 - a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

де $E$ — одинична матриця розмірності $4 \times 4$.

Тоді $a_1 = Sp(A)$, $a_4 = detA$ [89] та

$$a_3 = F'(\lambda)|_{\lambda=0} = (det(\lambda E - A))'|_{\lambda=0}.$$

Позначимо $B(\lambda) = \{b_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{4} = \lambda E - A$. Для $detB(\lambda)$ буде справедливе представлення:

$$detB(\lambda) = \sum_{i=1}^{4} b_{4i}(\lambda) B_{4i}(\lambda),$$

де $B_{4i}(\lambda)$, $i = \overline{1{,}4}$ — алгебраїчне доповнення до елемента $b_{4i}(\lambda)$, $i = \overline{1{,}4}$, тоді частинні похідні можна представити у вигляді:

$$\frac{\partial det B(\lambda)}{\partial b_{4i}(\lambda)} = B_{4i}(\lambda), i = \overline{1{,}4}.$$

Тоді повну похідну можна представити у вигляді:

$$(det B(\lambda))' = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial B(\lambda)}{\partial b_{ij}(\lambda)} \frac{db_{ij}(\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial B(\lambda)}{\partial b_{4i}(\lambda)} \frac{db_{4i}(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{4} B_{4i}(\lambda) \frac{db_{4i}(\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= Sp\left(B^{+}(\lambda)\frac{dB(\lambda)}{d\lambda}\right) = Sp\left(B^{+}(\lambda)E\right) = Sp((\lambda E - A)^{+}),$$

де $B^{+}(\lambda)$ — союзна матриця до матриці $B(\lambda)$, тобто, матриця, створена з алгебраїчних доповнень для відповідних елементів матриці $B(\lambda)$ і транспонована по тому.

Звідси отримаємо

$$a_3 = -(det(\lambda E - A))'\,|_{\lambda=0} =$$

$$= -Sp((\lambda E - A)^{+})|_{\lambda=0} = Sp(A^{+}).$$

Тоді справедливе представлення:

$$a_2 = \frac{1}{2}F''(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{1}{2}\left(Sp\left(B^{+}(\lambda)\right)\right)'|_{\lambda=0}.$$

Оскільки $Sp(B^{+}(\lambda))$ є функцією від $\lambda$, то похідну від суми алгебраїчних доповнень, що стоять на діагоналі матриці, можна представити у вигляді суми похідних алгебраїчних доповнень:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left.\left(\sum_{i=1}^{4} B_{ii}(\lambda)\right)'\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left(a_{ii} - b_i\left(\tilde{x}_i - L + \sum_{l=1}^{4}\tilde{x}_l\right)\right)\times$$

$$\times \left( a_{jj} - b_j \left( \tilde{x}_j - L + \sum_{l=1}^{4} \tilde{x}_l \right) \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} (a_{ij} - b_i\tilde{x}_i)(a_{ji} - b_j\tilde{x}_j).$$

За критерієм Рауса-Гурвіца для стійкості за першим наближенням особливої точки необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були додатними. Для системи (59) при $N = 4$ матриця Гурвіца має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Отже, щоб розв'язки системи (59) були стійкими, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} Sp(A) < 0, \\ detA > 0, \\ Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\ (Sp(A))^2 detA - Sp(A^+)(Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0. \end{cases}$$

Ці нерівності гарантують додатність головних мінорів 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків, тобто, виконання цих умов є необхідним для стійкості розв'язків системи (55) при $N > 4$. □

*Наслідок* 8. Нехай для системи (55) при $N = 3$ існує особлива точка $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)^*$ з невід'ємними компонентами вектора, то розв'язки даної системи будуть стійкими в околі стаціонарної точки за першим наближенням, якщо будуть виконуватись умови:

$$\begin{cases} Sp(A) < 0, \\ detA < 0, \\ detA - Sp(A^+)Sp(A) > 0, \end{cases}$$

де $A^+$ — союзна до матриці $A$.

### 2.1.2 Аналіз моделей із зовнішніми впливами спеціального вигляду

Розглянемо окремий випадок системи (55) при $N = 2$, тоді отримуємо систему вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = b_1x_1(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\ \quad + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + c_1, \\ \dot{x}_2(t) = b_2x_2(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\ \quad + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + c_2. \end{cases} \tag{59}$$

Для цієї системи особлива точка $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)^*$ знаходиться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} b_1x_1(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\ + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + c_1 = 0, \\ b_2x_2(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\ + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + c_2 = 0. \end{cases}$$

**Теорема 18.** *Нехай для параметрів системи (59) існує особлива точка $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)^*$ з невід'ємними компонентами вектора, які задовільняють умови:*

$$\begin{cases} b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} + b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22} < 0, \\ (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) - \\ -(a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(a_{21} - b_2\tilde{x}_2) > 0, \end{cases}$$

*тоді розв'язки системи (59) будуть стійкими в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)^*$ за першим наближенням.*

*Доведення.* Лінеаризована система (59) в околі точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$ матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(x_1(t) - \tilde{x}_1) + \\ \quad + (a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(x_2(t) - \tilde{x}_2), \\ \dot{x}_2(t) = (a_{21} - b_2\tilde{x}_2)(x_1(t) - \tilde{x}_1) + \\ \quad + (b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22})(x_2(t) - \tilde{x}_2), \end{cases} , t \in (0,T). \tag{60}$$

Уведемо позначення $\bar{X}(t) = (\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t))^*$, $\bar{x}_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i$, $i = \overline{1,2}$, $t \in (0,T)$, тоді систему (60) можна представити у матричному вигляді:

$$\dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t), t \in (0,T), \tag{61}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} b_1\left(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\right) + a_{11} & a_{12} - b_1\tilde{x}_1 \\ a_{21} - b_2\tilde{x}_2 & b_2\left(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2\right) + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичне рівняння для системи диференціальних однорідних рівнянь (61) матиме вигляд:

$$det(\lambda E - A) \ = \lambda^2 - \lambda(b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} +$$

$$+ b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) - (a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(a_{21} - b_2\tilde{x}_2) +$$

$$+ (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}).$$

Користуючись критерієм Рауса-Гурвіца, отримаємо, що точка $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватись нерівності:

$$\left\{ \begin{array}{c} b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11} + b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22} < 0, \\ (b_1(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + a_{11})(b_2(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) + a_{22}) - \\ -(a_{12} - b_1\tilde{x}_1)(a_{21} - b_2\tilde{x}_2) > 0. \end{array} \right.$$

$\square$

Розглянемо окремий випадок системи (5), коли зовнішні керування моделюються у вигляді:

$$u_k(t) = \gamma_k x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Тоді розглядається система вигляду:

$$\dot{x}_k = b_k x_k(t) \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right) +$$

$$+ \gamma_k x_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \quad (62)$$

Особливі точки $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^*$ знаходяться з рівнянь:

$$\tilde{x}_k \left( b_k \left( L - \sum_{k=1}^{N} \tilde{x}_i \right) + \gamma_k \right) = 0, k = \overline{1,N}. \quad (63)$$

Очевидно, що тривіальний розв'язок $(0, \ldots, 0)^*$ буде задовольняти систему рівнянь (63), як і точка $\left(0, \ldots, \frac{\gamma_k}{b_k} + L, \ldots, 0\right)^*$, $\frac{\gamma_k}{b_k} \le 0, \ k = \overline{1,N}$.

**Теорема 19.** *Розв'язки системи (62) будуть стійкими в околі особливої точки $\tilde{x}$ за першим наближенням тоді і тільки тоді, коли будуть виконуватися умови:*

– $b_k L + \gamma_k < 0$, $k = \overline{1,N}$, *якщо особлива точка* $\tilde{x} = (0, \ldots, 0)^*$*;*

– $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_i + b_i L > 0, \\ -L \le \frac{\gamma_i}{b_i} \le 0, \\ \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} < 0, \end{array} \right.$ , $i \in \overline{1,N}$, $k = \overline{1,N}$, $k \neq i$,

*якщо особлива точка* $\tilde{x} = \left(0, \ldots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \ldots, 0\right)^*$, $\frac{\gamma_i}{b_i} \le 0$, $i = \overline{1,N}$.

*Доведення.* Ліанеризувавши систему (62) в околі особливої точки $\tilde{x}$ та увівши заміну $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_N(t))^*$, $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, отримаємо систему вигляду:

$$\dot{\bar{x}}_k(t) = \left( b_k \left( L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \right) + \gamma_k \right) \bar{x}_k(t)$$

$$- b_k \tilde{x}_k \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \quad (64)$$

Розглянемо окремі випадки системи (64) для різних особливих точок. Для особливої точки $\tilde{x} = (0, \ldots, 0)^*$ система (64) набуде вигляду:

$$\dot{\bar{x}}_k(t) = (b_k L + \gamma_k) \bar{x}_k(t), k = \overline{1,N}, k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

тоді особлива точка $\tilde{x} = (0, \ldots, 0)^*$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватись нерівності:

$$b_k L + \gamma_k < 0, k = \overline{1,N}.$$

Для особливої точки $\tilde{x} = \left(0, \ldots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \ldots, 0\right)^*$, $\frac{\gamma_i}{b_i} \le 0$, $i = \overline{1,N}$ система (64) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}}_i(t) = -(\gamma_i + L b_i) \sum_{j=1}^{N} \bar{x}_j(t), i \in \overline{1,N}, \\ \dot{\bar{x}}_k(t) = \left( \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} \right) \bar{x}_k(t), k = \overline{1,N}, k \neq i, \end{array} \right. t \in (0,T). \quad (65)$$

Систему (65) можна представити у матричному вигляді:

$$\dot{\bar{X}}(t) = A \bar{X}(t), t \in (0,T), \quad (66)$$

де

$$
A = \begin{pmatrix} \gamma_1 - b_1 \frac{\gamma_i}{b_i} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_i - Lb_i & \dots & -\gamma_i - Lb_i & \dots & -\gamma_i - Lb_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \gamma_N - b_N \frac{\gamma_i}{b_i} \end{pmatrix}, i \in \overline{1,N}.
$$

Характеристичне рівняння для системи (66) має вигляд:

$$
(-\gamma_i - Lb_i) \prod_{k=1, k\neq i}^{N} \left( \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} \right) = 0, i \in \overline{1,N}.
$$

Особлива точка $\tilde{x} = \left(0, \dots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \dots, 0\right)^*$, $\frac{\gamma_i}{b_i} \leq 0$, $i = \overline{1,N}$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватися умови:

$$
\begin{cases} \gamma_i + b_i L > 0, \\ -L \leq \frac{\gamma_i}{b_i} \leq 0, \\ \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} < 0, \end{cases} , i \in \overline{1,N}, k = \overline{1,N}, k \neq i.
$$

□

*Зауваження* 1. Якщо для системи (62) виконуються умови:

$$
\frac{\gamma_1}{b_1} = \dots = \frac{\gamma_N}{b_N}
$$

то особливих точок безліч і вони лежать на прямій $L - \sum_{k=1}^{N} \tilde{x}_k - \frac{\gamma_1}{b_1} = 0$.

Розглянемо окремий випадок системи (5), коли зовнішні керування моделюються у вигляді:

$$
u_k(t) = \gamma_k (x_k(t) - m_k L), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),
$$

$$
m_k \geq 0, \sum_{k=1}^{N} m_k = 1, k = \overline{1,N},
$$

тоді досліджуватимемо систему вигляду:

$$
\dot{x}_k = b_k x_k(t) \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right) +
$$

$$+\gamma_k(x_k(t)-m_kL), k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \quad (67)$$

Особлива точка $\tilde{x}$ системи (67) має знаходиться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i=L, \\ \tilde{x}_k-m_kL=0, k=\overline{1,N}. \end{cases} \quad (68)$$

Розв'язком системи (68) буде $\tilde{x}=(m_1L,\ldots,m_NL)^*$.

Лінеаризована система (67) після заміни $\bar{x}_k(t)=x_k(t)-\tilde{x}_k$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ матиме вигляд:

$$\dot{\bar{x}}_k(t)=b_k\left(L-L\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\bar{x}_k(t)-$$

$$-b_km_kL\sum_{i=1}^{N}\bar{x}_i(t)+\gamma_k\bar{x}_k, k=\overline{1,N}, t\in(0,T).$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{N}m_i=1$, то вищенаведена система рівнянь набуде вигляду:

$$\dot{\bar{x}}_k(t)=\gamma_k\bar{x}_k-b_km_kL\sum_{i=1}^{N}\bar{x}_i(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \quad (69)$$

Систему диференціальних рівнянь (69) можна також представити як:

$$\dot{\bar{X}}(t)=A\bar{X}(t), t\in(0,T), \quad (70)$$

де

$$A=\begin{pmatrix} p_1 & \ldots & -b_1m_1L & \ldots & -b_1m_1L \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_im_iL & \ldots & p_i & \ldots & -b_im_iL \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_Nm_NL & \ldots & -b_Nm_NL & \ldots & p_N \end{pmatrix}, i\in\overline{1,N},$$

$$p_i=\gamma_i-b_im_iL, i=\overline{1,N}.$$

Характеристичне рівняння для системи (70):

$$det(\lambda E-A)=\lambda^N-\lambda^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i-L\sum_{i=1}^{N}b_im_i\right)+$$

$$+\lambda^{N-2}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\sum_{j=i+1}^{N}\gamma_j - L\sum_{i=1}^{N}b_im_i\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\gamma_j\right)-\dots+$$
$$+(-1)^N\left(\prod_{i=1}^{N}\gamma_i - L\sum_{i=1}^{N}b_im_i\prod_{j=1,j\neq i}^{N}\gamma_i\right)=0.$$

**Теорема 20.** *Для того, щоб розв'язки системи (67) були стійкими в околі особливої точки $\tilde{x}=(m_1L,\dots,m_NL)^*$ за першим наближенням необхідно, а для випадку $N=4$ і достатньо, щоб виконувалися умови:*

$$\begin{cases}
\sum_{i=1}^4\gamma_i - L\sum_{i=1}^4 b_im_i<0,\\
\prod_{i=1}^4\gamma_i - L\left(\sum_{i=1}^4 b_im_i\prod_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j\right)>0,\\
\sum_{i=1}^4\prod_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\prod_{j,l=1,j,l\neq i,j\neq l}^4\gamma_j\gamma_l-\\
-\left(\prod_{i,j=1,i\neq j,i\neq j}^4\gamma_i\gamma_j - L\sum_i^4 b_im_i\sum_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j\right)\times\\
\times\left(\sum_{i=1}^4\gamma_i - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\right)>0,\\
\left(\sum_{i=1}^4\gamma_i - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\right)^2\times\\
\times\left(\prod_{i=1}^4\gamma_i - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\prod_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j\right)-\\
-\left(\sum_{i=1}^4\prod_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\prod_{j,l=1,j,l\neq i,j\neq l}^4\gamma_j\gamma_l\right)\times\\
\times\left(\sum_{i=1}^4\prod_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\prod_{j,l=1,j,l\neq i,j\neq l}^4\gamma_j\gamma_l-\right.\\
-\left(\prod_{i,j=1,i\neq j,i\neq j}^4\gamma_i\gamma_j - L\sum_i^4 b_im_i\sum_{j=1,j\neq i}^4\gamma_j\right)\times\\
\left.\times\left(\sum_{i=1}^4\gamma_i - L\sum_{i=1}^4 b_im_i\right)\right)<0.
\end{cases}\tag{71}$$

*Доведення.* В силу Твердження 17, для того, щоб система (67) була стійкою в околі особливої точки $\tilde{x}=(m_1L,\dots,m_NL)^*$ за першим наближенням, необхідно, а у випадку $N=4$ і достатньо, щоб задовольнялися умови:

$$\begin{cases}
Sp(A)<0,\\
detA>0,\\
Sp(A^+)-a_2Sp(A)>0,\\
(Sp(A))^2-Sp(A^+)(Sp(A^+)-a_2Sp(A))<0.
\end{cases}\tag{72}$$

Для системи (67) при $N = 4$ справедливі формули:

$$Sp(A) = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i - L \sum_{i=1}^{4} b_i m_i,$$

$$det(A) = \prod_{i=1}^{4} \gamma_i - L \sum_{i=1}^{4} b_i m_i \prod_{j=1, j\neq i}^{4} \gamma_j,$$

$$a_2 = \prod_{i,j=1, i\neq j, i\neq j}^{4} \gamma_i \gamma_j - L \sum_{i}^{4} b_i m_i \sum_{j=1, j\neq i}^{4} \gamma_j,$$

$$Sp(A^+) = \sum_{i=1}^{4} \prod_{j=1, j\neq i}^{4} \gamma_j - L \sum_{i=1}^{4} b_i m_i \prod_{j,l=1, j,l\neq i, j\neq l}^{4} \gamma_j \gamma_l,$$

Підставивши вищенаведені формули в (72), отримаємо систему умов (71), що і треба було довести. $\square$

Розглянемо окремий випадок системи (5), коли зовнішні керування моделюються у вигляді:

$$u_k(t) = \gamma_k \sum_{i=1}^{N} x_i(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T),$$

тоді досліджуватимемо систему вигляду:

$$\dot{x}_k = b_k x_k(t) \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right) +$$

$$+ \gamma_k \sum_{i=1}^{N} x_i(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \tag{73}$$

Для системи (73) особлива точка є тривіальною $\tilde{x} = (0, \ldots, 0)^*$.

Ліанеризована в околі точки $\tilde{x} = (0, \ldots, 0)$ система (73) після заміни $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ матиме вигляд:

$$\dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t), t \in (0,T), \tag{74}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 + b_1 L & \dots & \gamma_1 & \dots & \gamma_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_i & \dots & \gamma_i + b_i L & \dots & \gamma_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_N & \dots & \gamma_N & \dots & \gamma_N + b_N L \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння для системи (74) є алгебраїчним рівнянням $N$-ої степені:

$$det(\lambda E + A) = \lambda^N - \lambda^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i + L\sum_{i=1}^{N} b_i\right) +$$

$$+\lambda_{N-2}\left(L\sum_{i=1}^{N}\gamma_i \sum_{j=1, j\neq i}^{N} b_j + L^2\sum_{i=1}^{N-1} b_i \sum_{j=i+1, j\neq i}^{N} b_j\right) - \dots +$$

$$+(-1)^{N-1}\left(L^N\prod_{i=1}^{N} b_i + L^{N-1}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i \prod_{j=1, j\neq i}^{N} b_j\right) = 0.$$

**Теорема 21.** *Для того, щоб розв'язки системи (73) були стійкими за першим наближенням в околі особливої точки* $\tilde{x} = (0, \dots, 0)^*$ *необхідно, а у випадку* $N = 4$ *і достатньо, щоб виконувалися умови:*

$$\left\{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^4 \gamma_i + L\sum_{i=1}^4 b_i < 0, \\ L^4\prod_{i=1}^4 b_i + L^3\sum_{i=1}^4 \gamma_i \prod_{j=1, j\neq i}^4 b_j > 0, \\ L^2\sum_{i=1}^4 \gamma_i \sum_{j,l=1, j,l\neq i, j\neq l}^4 b_j b_l + \\ +L^3\sum_{i=1}^4 \prod_{j=1, j\neq i}^4 b_j - L\sum_{i=1}^4 \gamma_i \sum_{j=1, j\neq i}^4 b_j + \\ +L^2\sum_{i,j=1, i\neq j}^4 b_i b_j \times \sum_{i=1}^4 \gamma_i + L\sum_{i=1}^4 b_i > 0, \\ \left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i + L\sum_{i=1}^4 b_i\right)^2 \times \\ \times\left(L^4\prod_{i=1}^4 b_i + L^3\sum_{i=1}^4 \gamma_i \prod_{j=1, j\neq i}^4 b_j\right) - \\ -L^2\sum_{i=1}^4 \gamma_i \sum_{j,l=1, j,l\neq i, j\neq l}^4 b_j b_l + L^3\sum_{i=1}^4 \prod_{j=1, j\neq i}^4 b_j \times \\ \times\left(L^2\sum_{i=1}^4 \gamma_i \sum_{j,l=1, j,l\neq i, j\neq l}^4 b_j b_l + L^3\sum_{i=1}^4 \prod_{j=1, j\neq i}^4 b_j - \right. \\ -\left(L\sum_{i=1}^4 \gamma_i \sum_{j=1, j\neq i}^4 b_j + L^2\sum_{i,j=1, i\neq j}^4 b_i b_j\right) \times \\ \left. \times\left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i + L\sum_{i=1}^4 b_i\right)\right) < 0. \end{array}\right. \tag{75}$$

*Доведення.* В силу Твердження 17, для того, щоб система (73) була стійкою в околі особливої точки $\tilde{x} = (0, \dots, 0)^*$ за першим наближенням, необхідно, а у випадку $N = 4$ і достатньо, щоб задовольнялися умови:

$$\begin{cases} Sp(A) < 0, \\ detA > 0, \\ Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\ (Sp(A))^2 - Sp(A^+)(Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0. \end{cases} \tag{76}$$

Для системи (67) при $N = 4$ справедливі формули:

$$Sp(A) = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i + L \sum_{i=1}^{4} b_i,$$

$$det(A) = L^4 \prod_{i=1}^{4} b_i + L^3 \sum_{i=1}^{4} \gamma_i \prod_{j=1, j \neq i}^{4} b_j,$$

$$a_2 = L \sum_{i=1}^{4} \gamma_i \sum_{j=1, j \neq i}^{4} b_j + L^2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^{4} b_i b_j,$$

$$Sp(A^+) = L^2 \sum_{i=1}^{4} \gamma_i \sum_{j,l=1, j,l \neq i, j \neq l}^{4} b_j b_l + L^3 \sum_{i=1}^{4} \prod_{j=1, j \neq i}^{4} b_j,$$

Підставивши вищенаведені формули в (76), отримаємо систему умов (75), що і треба було довести. □

## 2.2 Стохастична стійкість за першим наближенням в околі особливих точок для моделей поширення інформації

### 2.2.1 Аналіз моделі із стаціонарними параметрами

Розглянемо випадок зі стаціонарними параметрами, коли зовнішні впливи моделюється у такій формі:

$$u_k(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i(t) + c_k, k = \overline{1, N}, t \in (0,T).$$

Тоді система (5) набуде вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = b_k x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i(t) + c_k, x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0{,}T). \qquad (77)$$

Нехай відбувається збурюючий вплив на параметри інтенсивності спілкування $b_k$,$k = \overline{1, N}$. При таких припущеннях модель можна представити у вигляді системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто :

$$dx_k(t) = \left[b_k x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) + \sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i(t) + c_k\right]dt+$$

$$+ g_k x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) dw_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0{,}T), \qquad (78)$$

з початковими умовами:

$$x_k(0) = x_{0k}, k = \overline{1,N},$$

де $w_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0{,}T)$ — Вінерівський процес, $dx_k(t)$ та $dw_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0{,}T)$ — відповідні стохастичні диференціали процесів $x_k(t)$ та $w_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0{,}T)$ в розумінні Іто.

Знайдемо особливу точку $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$ для детермінованого випадку системи (78) з системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} a_{ki}\tilde{x}_i + c_k = 0, k = \overline{1, N}. \end{cases} \qquad (79)$$

Далі будемо припускати, що $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$ існує і компоненти вектора невід'ємні.

Для опису траєкторій в околі особливої точки (78) розглядатимемо лінійне наближення системи $\tilde{x}$:

$$dx_k(t) = \left[b_k\left(L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i\right)(x_k(t) - \tilde{x}_k)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}-b_k\tilde{x}_k)(x_i(t)-\tilde{x}_i)\Bigg]dt+$$

$$+g_k\left[\left(L-\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i\right)(x_k(t)-\tilde{x}_k)-\right.$$

$$\left.-\,\tilde{x}_k\sum_{i=1}^{N}(x_i(t)-\tilde{x}_i)\right]dw_k(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \qquad (80)$$

У силу (79) систему (80) можна представити у вигляді:

$$dx_k(t)=\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}-b_k\tilde{x}_k)(x_i(t)-\tilde{x}_i)dt-$$

$$-g_k\tilde{x}_k\sum_{i=1}^{N}(x_i(t)-\tilde{x}_i)dw_k(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T).$$

Зробивши заміну $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k, k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, отримуємо лінійну систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто:

$$d\bar{x}_k(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ki}-b_k\tilde{x}_k)\bar{x}_i(t)dt-$$

$$-\,g_k\tilde{x}_k\sum_{i=1}^{N}\bar{x}_i(t)dw_k(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T). \qquad (81)$$

Увівши векторні функції $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t),\ldots,\bar{x}_N(t))^*$, $w(t) = (w_1(t),\ldots,w_N(t))^*$, $t \in (0,T)$, систему (81) можна представити у векторно-матричній формі:

$$d\bar{x}(t)=A\bar{x}(t)dt+\sum_{i=1}^{N}\bar{x}_i(t)Bdw(t), t\in(0,T), \qquad (82)$$

де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}-b_1\tilde{x}_1 & \ldots & a_{1N}-b_1\tilde{x}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1}-b_N\tilde{x}_N & \ldots & a_{NN}-b_N\tilde{x}_N \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -g_1\tilde{x}_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -g_N\tilde{x}_N \end{pmatrix}.$$

**Теорема 22.** *Нехай для системи (78) існує $\tilde{x}$ з невід'ємними компонентами тоді, щоб розв'язки даної системи були асимптотично стійкими в середньо-квадратичному в околі особливої точки $\tilde{x}$ за першим наближенням, необхідно і достатньо, щоб власні числа матриці*

$$C_N = A + A^* + SpB^*BE_N,$$

*де $E_N$ — матриця розмірністю $N \times N$, що має вигляд:*

$$E_N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

*були від'ємні.*

*Доведення.* За визначенням нульовий розв'язок $\bar{x}(t) \equiv 0$ системи (81) є асимптотично стійким в середньо-квадратичному, якщо виконується умова:

$$E\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right) \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

де $E$ знак математичного очікування.

Розглянемо рівняння для математичного очікування, отримане за допомогою формули Іто:

$$\frac{dE\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right)}{dt} = 2E\left(A\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right) +$$

$$+ 2\frac{1}{2}E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{x}_i(t)\right)^2 SpB^*B\right], t \in (0,T), \tag{83}$$

з початковими умовами:

$$E\left(\bar{x}(0),\bar{x}(0)\right) = \sum_{i=1}^{N}(x_k^0 - \tilde{x}_k)^2.$$

Для рівняння (83) справедливі перетворення:

$$\frac{dE\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right)}{dt} = E\left(\left[A + A^* + SpB^*BE_N\right]\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right), t \in (0,T). \tag{84}$$

Для (84) виконуються оцінки:

$$\lambda_{min}(C_N)E\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right) \le \frac{dE\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right)}{dt} \le$$

$$\leq \lambda_{max}(C_N) E\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right), t \in (0,T),$$

де $\lambda_{min}(C_N)$ та $\lambda_{max}(C_N)$ є, відповідно, мінімальним та максимальним власними числами матриці $C_N$.

Тоді силу леми Гронуола-Белмана отримуємо такі нерівності:

$$\exp\left\{\int_0^t \lambda_{min}(C_N)\right\} E\left(\bar{x}(0),\bar{0}(t)\right) \leq E\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right) \leq$$

$$\leq \exp\left\{\int_0^t \lambda_{max}(C_N)\right\} E\left(\bar{x}(0),\bar{x}0(t)\right), t \in (0,T).$$

Оскільки параметри системи (78) є стаціонарними, маємо:

$$\exp\left\{\lambda_{min}(C_N)t\right\} \sum_{i=1}^{N} (x_k^0 - \tilde{x}_k)^2 \leq E\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right) \leq$$

$$\leq \exp\left\{\lambda_{max}(C_N)t\right\} \sum_{i=1}^{N} (x_k^0 - \tilde{x}_k)^2, t \in (0,T). \tag{85}$$

З (85) отримуємо, що

$$E\left(\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right) \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

якщо $\lambda_{max}(C_N) < 0$.

Звідси нульовий розв'язок $\bar{x}(t) \equiv 0$ системи (82) є асимптотично стійким в середньо-квадратичному, а розв'язки системи (78) є асимпотично стійкими в середньо-квадратичному в околі особливої точки $\tilde{x}$ за першим наближенням, якщо власні числа матриці $C_N$ від'ємні. □

### 2.2.2 Аналіз моделі із нестаціонарними параметрами

Розглянемо окремий випадок системи (5)

$$\dot{x}_k(t) = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) +$$

$$+ \gamma_k(t)(x_k(t) - m_k L), x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T), \tag{86}$$

де

$$m_k \geq 0, \sum_{i=1}^{N} m_i = 1.$$

Нехай відбувається збурюючий вплив на параметри інтенсивності спілкування $b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ системи (86). Це можна змоделювати у вигляді системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто:

$$dx_k(t) = \left[(a_k(t) + b_k(t)x_k(t))\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \gamma_k(t)(x_k(t) - m_k L)\right] dt +$$

$$+ g_k(t)x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) dw_k(t), k = \overline{1,N}, t \in (0,T), \qquad (87)$$

з початковими умовами

$$x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}.$$

Позначимо через $\tilde{x} = (m_1 L, \ldots, m_N L)^*$ особливу точку детермінованого випадку системи (87). Для опису траєкторій в околі особливої точки $\tilde{x}$ розглядатимемо лінійне наближення системи (87) :

$$dx_k(t) = \left[-(a_k(t) + b_k(t)\tilde{x}) \sum_{i=1}^{N} (x_i(t) - \tilde{x}_i) + \right.$$

$$\left. + \left(\gamma_k(t) + b_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i\right)\right)(x_k(t) - \tilde{x}_k)\right] dt +$$

$$+ \left[g_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i\right)(x_k(t) - \tilde{x}_k) - \right.$$

$$\left. -g_k(t)\tilde{x}_k \sum_{i=1}^{N} x_i(t) - \tilde{x}_i\right] dw_k(t), x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Зробивши заміну $\bar{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, отримуємо лінійну систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто:

$$d\bar{x}(t) = A(t)\bar{x}(t)dt + \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i(t)B(t)dw(t), t \in (0,T), \qquad (88)$$

де

$$A(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & \dots & -a_1(t) - b_1(t)m_1L \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_N(t) - b_N(t)m_NL & \dots & p_N(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} -g_1(t)m_1L & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -g_N(t)m_NL \end{pmatrix}, t \in (0,T),$$

$$p_i(t) = \gamma_i(t) - a_i(t) - b_i(t)m_iL, i = \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

**Теорема 23.** *Для того, щоб розв'язки системи (87) були асимптотично стійкими в середньо-квадратичному в околі особливої точки* $\tilde{x} = (m_1L, \dots, m_NL)^*$ *за першим наближенням достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda_{max}(D_N(\tau))d\tau \le -c, c > 0, \forall t \in (0,T),$$

*де* $\lambda_{max}(D_N(t))$, $t \in (0,T)$ *— максимальне власне число матриці* $D_N(t)$, $t \in (0,T)$,

$$D_N(t) = A(t) + A^*(t) + SpB(t)^*B(t)E_N, t \in (0,T).$$

*Доведення.* Розглянемо рівняння для математичного очікування, отримане за допомогою формули Іто:

$$\frac{dE(\bar{x}(t),\bar{x}(t))}{dt} =$$

$$= E\left([A(t) + A^*(t) + SpB(t)^*B(t)E_N]\,\bar{x}(t),\bar{x}(t)\right), t \in (0,T), \quad (89)$$

з початковими умовами:

$$E(\bar{x}(0),\bar{x}(0)) = \sum_{i=1}^{N} (x_k^0 - m_NL)^2.$$

В силу нерівності Важевського [89] отримаємо оцінки для розв'язків системи (89):

$$\exp\left\{\int_0^t \lambda_{min}(D_N(t))\right\} E(\bar{x}(0),\bar{0}(t)) \le E(\bar{x}(t),\bar{x}(t)) \le$$

$$\leq \exp\left\{\int_0^t \lambda_{max}(D_N(t))\right\} E\left(\bar{x}(0),\bar{0}(t)\right).$$

Нульовий розв'язок $\overline{x}(t) \equiv 0$ системи (88) є асимптотично стійким в середньоквадратичному, якщо виконується умова:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda_{max}(D_N(\tau))d\tau \leq -c, c > 0, \forall t \in (0,T). \qquad (90)$$

Тоді, розв'язки системи (87) будуть асимптотично стійкими в середньо-квадратичному за першим наближенням в околі особливої точки $(m_1L, \ldots, m_NL)^*$ за умови справедливості (90). $\square$

В першій частині детально розглянута базова модель поширення інформації, а також окремі випадки даної моделі, що враховують особливості та конкретні механізми, якими може бути охарактеризований конкретний процес поширення інформації в соціумі.

Особливу увагу приділено задачі знаходження аналітичних розв'язків для окремих випадків математичної моделі поширення інформації, в тому числі і з використанням методу малого параметру. Це є нетривіальною задачею для систем нелінійних диференціальних рівнянь і вона не є розв'язаною в довільному випадку. Для випадку, коли аналітичний розв'язок не має місця, запропоновано оцінки, що дають можливість судити про додатність та обмеженість розв'язків.

Закономірною задачею для систем диференціальних рівнянь є задача дослідження стійкості системи. Були сформульовані умови стійкості за першим наближенням в околах особливих точок для моделей зі стаціонарними параметрами, а також для моделей із нестаціонарними параметрами, які піддаються збурюючому впливу, і тоді модель набуває вигляду системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

## Частина II

# ОЦІНЮВАННЯ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Однією із задач, яка виникає при розробці математичних моделей динамічних процесів, є побудова алгоритмів оцінювання параметрів моделі за умови наявності спостережень за досліджуваною системою. Дана проблематика широко висвітлена в теорії систем, зокрема цій проблематиці присвячені роботи [67] — [69].

Не менш важливою задачею, роз'язок якої дозволяє ефективно працювати з математичною моделлю популяційної динаміки, є задача знаходження прогнозних оцінок. Цій проблематиці приділяється увага в роботах [104] — [108].

# Розділ 3 Оптимальні та гарантовані оцінки нестаціонарних параметрів диференціальних рівнянь

## 3.1 Випадок неперервних спостережень

Нехай на інтервалі $t \in (0,T))$ відстежується вектор-функція $x(t) \in R^N$, яка є узагальненим розв'язком рівняння:

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t))\varphi(t) + f(t,x(t)) + \eta(t), t \in (0,T), \tag{91}$$

де $F(t,x(t))$, $t \in (0,T)$ — задана матрична функція розмірності $N\times$ $\times M$, $f(t,x(t)) \in R^M$,$t \in (0,T)$ — задана вектор-функція, $\varphi(t) \in R^M$, $\eta(t) \in R^N$, $t \in (0,T)$ — невідомі вектор-функції.

Позначимо через $L_{2,M}(0,T)$ та $L_{2,N}(0,T)$ — простори вимірних інтегрованих з квадратом на $(0,T)$ функцій із просторів $R^M$ та $R^N$ відповідно. Припустимо, що $F(t,x(t))$ і $f(t,x(t))$, $t \in (0,T)$ — обмежені та неперервні на $(0,T)$ функції своїх аргументів, функція $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0,T)$, де $Q$ — клас $k-1$ $(k > 1)$ разів неперервно диференційованих вектор-функцій, для яких існує узагальнена похідна $k$-го порядку; також припустимо, що $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ належить простору $L_{2,M}(0,T)$, а функція $\eta(t)$, $t \in (0,T)$ — простору $L_{2,N}(0,T)$.

**Означення 1.** Під *узагальненим розв'язком* рівняння (91) з початковою умовою $x(0) = x^0$ розуміємо вектор-функцію $x(t)$, $t \in (0,T)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння:

$$x(t) = x^0 + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t f(\tau, x(\tau)d\tau + \tilde{\eta}(t), t \in (0,T), \tag{92}$$

де

$$\tilde{\eta}(t) = \int_0^t \eta(\tau)d\tau, t \in (0,T).$$

Припускаємо, що розв'язок рівняння (92) існує та єдиний.

Задача полягає в знаходженні оптимальної в певному сенсі оцінки функції $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0,T)$ із заданими спостереженнями $x(t)$, $t \in (0,T)$ та відомими обмеженнями на функції $\varphi(t)$ та $\eta_1(t)$, $t \in (0,T)$.

Припускаємо, що $(\varphi, \tilde{\eta}) \in G$, причому множина $G$ задається у вигляді:

$$G = \{(\varphi, \tilde{\eta}) : \Phi(\varphi, \tilde{\eta}) \leq \gamma^2(T)\},$$

$$\Phi(\varphi, \tilde{\eta}) = \int_0^T q_1^2(\tau)|\varphi^{(k)}(\tau)|^2 d\tau + \int_0^T q_2^2(\tau)|\tilde{\eta}(\tau)|^2 d\tau,$$

де $q_i(t)$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$ — неперервні на $(0,T)$ функції, такі що для деякого числового параметра $v > 0$ виконуються нерівності $q_i^2(t) \geq v$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$; $\gamma^2(T)$ — відоме значення.

**Теорема 24.** *У просторі $L_{2,M}(0,T)$ множна $G$ є обмеженою.*

*Доведення.* Розглянемо $\varphi^{(k)}(t) = u(t)$, $t \in (0,T)$. Для цієї функції виконується рівність:

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t), t \in (0,T),$$

де функція $\tilde{\varphi}_1(t)$, $t \in (0,T)$ задовольняє рівняння $\tilde{\varphi}_1^{(k)}(t) = u(t)$, $\tilde{\varphi}_1^{(s)}(t) = 0$, $s = \overline{1,k-1}$, $t \in (0,T)$ і є обмеженою в просторі $L_{2,M}(0,T)$; функція $\tilde{\varphi}_2(t)$, $t \in (0,T)$ має вигляд $\tilde{\varphi}_2(t) = \sum_{s=0}^{k-1} c_s t^s$, $t \in (0,T)$, де $c_s$, $s = \overline{1,k-1}$ — довільні вектори, $\tilde{\varphi}_2(t)$, $t \in (0,T)$ необмежена в $L_{2,M}(0,T)$. $\square$

*Зауваження* 2. Норма функції $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$ у просторі $L_{2,M}(0,T)$ може бути необмеженою, оскільки $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 \in G$, і за рахунок довільних векторів $c_s$, $s = \overline{1,k-1}$.

**Теорема 25.** *Має місце представлення:*

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(\tau) d\tau + \sum_{s=0}^{k-1} c_s t^s, t \in (0,T), \tag{93}$$

*де $c_s = \varphi^{(s)}(0)$, $s = \overline{1,k-1}$.*

*Доведення.* Справедливість цього твердження перевіряється диференціюванням $k-1$ раз виразу (93). Отримаємо рівність:

$$\varphi^{(k-1)}(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau + \varphi^{(k-1)}(0), t \in (0,T),$$

де $u(t) = \varphi^{(k)}(t)$, $t \in (0,T)$. $\square$

Позначимо через $y(t)$, $t \in (0,T)$ та $\psi(t)$,$t \in (0,T)$ функції:

$$y(t) = x(t) - x(0) - \int_0^t f(\tau,x(\tau))d\tau, t \in (0,T),$$

$$\psi(t) = \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

а через $G_1$ — множину вигляду:

$$G_1 = \{\varphi : \Phi(\varphi, y - \psi) \le \gamma^2(T)\}.$$

*Зауваження* 3. Очевидно, що всі можливі функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ для спостережень за функціями $x(t)$, $t \in (0,T)$ належать множині $G_1$.

**Означення 2.** Функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$, яка знаходиться з умови $\hat{\varphi} \in Arg \min\limits_{\varphi \in G_1} \Phi(\varphi, y - \psi)$, назвемо *оптимальною за функціоналом.*

*Зауваження* 4. Якщо функція $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ існує, то $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ належить множині $G_1$.

**Означення 3.** Функцію $\hat{\varphi}_1(t)$, $t \in (0,T)$, що знаходиться з умови:

$$\inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\hat{\varphi}_1 - \varphi_2\| = \sigma,$$

де

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_0^T |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2},$$

назвемо *гарантованою* $L_2$*-оцінкою* функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$, а величину $\sigma$ — *гарантованою* $L_2$*-похибкою* функції $\hat{\varphi}_1(t)$, $t \in (0,T)$.

Знайдемо спочатку оптимальну за функціоналом функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$.

**Лема 1.** *Має місце рівність:*

$$\Phi(\varphi, y-\psi) = \int_0^T q_1^2(t)|u(t)|^2 dt +$$

$$+\int_0^T q_2^2(t)\left| y(t) - \int_0^T F_2(t,\tau)u(\tau)d\tau - \sum_{p=0}^{k-1} c_p g_p(t)\right|^2 dt,$$

*де*

$$F_2(t,s) = \int_0^T \chi_{(0,\tau)}(s)\frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}F_1(t,\tau)d\tau, t,s \in (0,T),$$

$$F_1(t,\tau) = \chi_{(0,t)}(\tau)F(\tau,x(\tau)), t,\tau \in (0,T),$$

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in (0,t), \\ 0, & \tau \notin (0,t), \end{cases} \quad t,\tau \in (0,T),$$

$$g_p(t) = \int_0^T F_1(t,\tau)\tau^p d\tau, p = \overline{1,k-1}, t \in (0,T).$$

*Доведення.* Зауважимо, що оскільки справедливе представлення:

$$\psi(t) = \int_0^t F(\tau,x(\tau))\varphi(\tau)d\tau = \int_0^T \chi_{(0,t)}(\tau)F(\tau,x(\tau))\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^T F_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, t \in (0,T)$$

і

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}u(s)ds + \sum_{p=0}^{k-1} c_p\tau^p, \tau \in (0,T),$$

то отримуємо

$$\psi(t) = \int_0^T F_1(t,\tau)\left[\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}u(s)ds + \sum_{p=0}^{k-1} c_p\tau^p\right]d\tau =$$

$$= \int_0^T F_1(t,\tau)\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}u(s)dsd\tau +$$

$$+\int_0^T F_1(t,\tau)\sum_{p=0}^{k-1} c_p\tau^p d\tau = \sum_{p=0}^{k-1} c_p g_p(t) +$$

$$+\int_0^T\int_0^T F_1(t,\tau)\chi_{(0,\tau)}(s)\frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}d\tau u(s)ds=$$

$$=\int_0^T F_2(t,s)u(s)ds+\sum_{p=0}^{k-1}c_pg_p(t), t\in(0,T).$$

Враховуючи вищенаведені співвідношення, одержуємо потрібне представлення для функціоналу $\Phi(\varphi, y-\psi)$. $\square$

Позначимо далі $I(u,c)$ функціонал вигляду $I(u,c) = \Phi(\varphi, y-\psi)$, де $c=(c_0,\ldots,c_{k-1})^*$.

**Теорема 26.** *Функція $\hat{u}_c$, $t \in (0,T)$ є единим розв'язком інтегрального рівняння:*

$$q_1^2(t)\hat{u}_c(t)+\int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}_c(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^T q_2^2(\tau)F_2^*(t,\tau)y(\tau)d\tau-\sum_{p=o}^{k-1}c_pg_{1p}(t),t\in(0,T), \tag{94}$$

*де*

$$g_{1p}(t)=\int_0^T q_2^2(\tau)F_2^*(t,\tau)g_p(\tau)d\tau, p=\overline{0,k-1},t\in(0,T),$$

$$\bar{F}_2(t,\tau)=\int_0^T q_2^2(s)F_2^*(t,s)F_2(t,\tau)ds, t,\tau\in(0,T).$$

*Доведення.* Зауважимо, що якщо $(\hat{u}_{\hat{c}},\hat{c})\in Arg\min_u I(u,c)$, то

$$\varphi(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\hat{u}_c(s)ds+\sum_{p=0}^{k-1}\hat{c}_p\tau^p, t\in(0,T).$$

Знайдемо функцію $\hat{u}_c(t)$, $t\in(0,T)$ з умови:

$$\frac{d}{d\tau}I(\hat{u}+\tau v)|_{\tau=0}=0, \forall v(\cdot)\in L_{2,M}(0,T).$$

Позначимо через $\tilde{y}(t)$, $t\in(0,T)$ функцію:

$$\tilde{y}(t)=y(t)-\sum_{p=0}^{k-1}{}_p\tau^p, t\in(0,T),$$

тоді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I(\hat{u}_c+\tau v)|_{\tau=0}=\int_0^T q_1^2(t)(\hat{u}_c(t),v(t))dt-$$

$$-\int_0^T q_2^2(t)(\tilde{y}(t)-\psi_1(t),\bar{\psi}_1(t))dt=$$

$$=\int_0^T q_1^2(t)(\hat{u}_c(t),v(t))dt+\int_0^T\left(\int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}_c(\tau)d\tau,v(t)\right)dt-$$

$$-\int_0^T q_2^2(t)\left(\int_0^T F_2^*(t,\tau)\tilde{y}(\tau)d\tau,v(t)\right)dt=0,$$

де

$$\psi_1(t)=\int_0^T F_2(t,\tau)\hat{u}_c(\tau)d\tau, t\in(0,T),$$

$$\bar{\psi}_1(t)=\int_0^T F_2(t,\tau)v(\tau)d\tau, t\in(0,T).$$

Звідси одержимо рівняння:

$$q_1^2(t)\hat{u}_c(t)+\int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}_c(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^T q_2^2(\tau)F_2^*(t,\tau)y(\tau)d\tau-\sum_{p=o}^{k-1}c_p g_{1p}(t),t\in(0,T).$$

□

**Лема 2.** *Існує єдина функція $\hat{u}_c(t)$, $t\in(0,T)$, така що $\hat{u}_c\in$ $\in Arg\min\limits_u I(u,c)$, $\forall c$.*

*Доведення.* Оскільки функціонал $I(u,c)$ для заданого вектора $c$ є напівнеперервним знизу і сильно опуклим, причому $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} I(u,c)=$ $=\infty$, то згідно [6] існує єдина функція $\hat{u}_c(t)$, $t\in(0,T)$ така, що $\hat{u}_c\in Arg\min\limits_u I(u,c)$, $\forall c$. □

Позначимо $\bar{u}_1(t)$, $t\in(0,T)$ розв'язок інтегрального рівняння вигляду:

$$q_1^2(t)\bar{u}_1(t)+\int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\bar{u}_1(\tau)d\tau=$$

$$= \int_0^T q_2^2(\tau) F_2^*(t,\tau) y(\tau) d\tau, t \in (0,T), \tag{95}$$

а через $U_p(t)$, $p = \overline{0,k-1}$, $t \in (0,T)$ — розв'язок системи інтегральних рівнянь:

$$q_1^2(t) U_p(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t,\tau) U_p(\tau) d\tau =$$

$$= -g_{1p}(t), p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T). \tag{96}$$

**Лема 3.** *Має місце рівність:*

$$\hat{u}(t) = \bar{u}_1(t) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(t) c_p, t \in (0,T). \tag{97}$$

*Доведення.* Справедливість представлення (97) випливає із лінійності інтегрального рівняння (94). □

**Теорема 27.** *Існує єдиний вектор з мінімальною нормою, такий що:*

$$\min_c I(\hat{u}_c, c) = I(\hat{u}_{\hat{c}}, \hat{c}).$$

*Доведення.* Оскільки

$$\int_0^T F_2(t,\tau) \hat{u}_c d\tau = \int_0^T F_2(t,\tau) \bar{u}_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{p=0}^{k-1} c_p \int_0^T F_2(t,\tau) U_p(\tau) d\tau, t \in (0,T),$$

то справедливе представлення:

$$I(\hat{u}_c, c) = \sum_{p_1,p_2=0}^{k-1} (A_{p_1,p_2} c_{p_2}, c_{p_1}) - 2 \sum_{p=0}^{k-1} (a_p, c_p) + b,$$

де

$$A_{p_1,p_2} = \int_0^T q_1^2(t) U_{p_1}^*(t) U_{p_2}(t) dt +$$

$$+ \int_0^T q_2^2(t) F_{3p_1}^*(t) F_{3p_2}(t) dt, p_1, p_2 = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

$$F_{3p}(t) = \int_0^T F_2(t,\tau)U_p(\tau)d\tau, p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

$$a_p = \int_0^T q_2^2(t)F_{3p}^*(t)\bar{y}(t)dt-$$

$$-\int_0^T q_1^2(t)U_p^*(t)\bar{u}_1(t)dt, p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

$$\bar{y}(t) = \tilde{y}(t) - \int_0^T F_2(t,\tau)\bar{u}_1(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

$$b = \int_0^T q_1^2(t)|\bar{u}_1(t)|^2dt + \int_0^T q_2^2(t)|\tilde{y}(t)|^2dt.$$

Очевидно, що множина векторів таких що $\hat{c} \in Arg\min_c I(\hat{u}_c, c)$, є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{p_2=0}^{k-1} A_{p_1,p_2}c_{p_2} = a_{p_1}, p_1 = \overline{0,k-1}. \tag{98}$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (98) можна представити у матричному вигляді:

$$Ac = a, \tag{99}$$

де

$$A = \{A_{p_1,p_2}\}_{p_1,p_2=0}^{k-1},$$

$$a = (a_0, \dots, a_{k-1})^*.$$

Якщо матриця $A$ вироджена, то всі розв'язки системи рівнянь (99) мають вигляд:

$$c = A^+a + v,$$

де $v \in kerA$, тобто $Av = 0$ , $A^+$ — псевдообернена матриця.

У такому разі справедливе представлення:

$$|c|^2 = |A^+a|^2 + |v|^2,$$

і мінімальна норма досягається на векторі $\hat{c} = A^+a$. □

**Теорема 28.** *Нехай* $\bar{u}_1(t)$, $U_p(t)$, $p = \overline{0,k-1}$, $t \in (0,T)$ *та вектор* $\hat{c} = (\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{k-1})^*$ *задовольняють системам рівнянь (95), (96), (98). Тоді має місце рівність:*

$$\min_{u,c} I(u_c,c) = I(\hat{u}_{\hat{c}},\hat{c}),$$

*де*

$$\hat{u}_{\hat{c}}(t) = \bar{u}_1(t) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(t)\hat{c}_p.$$

*Доведення.* Для $\min\limits_{u,c} I(u_c,c)$ справедливі рівності:

$$\min_{u,c} I(u_c,c) = \min_u \min_c I(u_c,c) = \min_c I(\hat{u}_c,c) = I(\hat{u}_{\hat{c}},\hat{c}),$$

що і потрібно було показати. □

*Наслідок* 9. Оптимальна за функціоналом оцінка $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ має вигляд:

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\hat{u}(s)ds + \sum_{p=0}^{k-1} \hat{c}_p t^p, t \in (0,T),$$

де

$$\hat{u}(s) = \bar{u}_1(s) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(s)\hat{c}_p, s \in (0,T).$$

Знайдемо далі умови обмеженості множини $G_1$.

**Лема 4.** *Функціонал*

$$I(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t)|\varphi^{(k)}|^2 dt + \int_0^T q_2^2(t)|y(t) - \psi(t,\varphi)|^2 dt,$$

*де*

$$\psi(t,\varphi) = \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

*можна представити у вигляді:*

$$I(\varphi) = I(\hat{\varphi}) + \int_0^T q_1^2(t)|(\varphi(t) - \hat{\varphi}(t))^{(k)}|^2 dt +$$

$$+\int_0^T q_2^2(t)|\psi(t,\varphi-\hat{\varphi})|^2dt = I(\hat{\varphi}) + I_1(\varphi-\hat{\varphi}),$$

*де*

$$I_1(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t)|\varphi^{(k)}(t)|^2dt + \int_0^T q_2^2(t)|\psi(t,\varphi)|^2dt.$$

*Доведення.* Оскільки $I(\varphi) = I(\hat{\varphi} + \tau(\varphi - \hat{\varphi}))|_{\tau=1}$, то з формули Тейлора отримуємо необхідне представлення. □

*Наслідок* 10. Множина $G_1$ має вигляд:

$$G_1 = \{\varphi : I_1(\varphi-\hat{\varphi}) \leq \gamma^2(T) - I(\hat{\varphi})\}.$$

**Теорема 29.** *Нехай існує число $\beta \neq 0$ таке, що виконується нерівність:*

$$\int_0^T\int_0^T (K(t,s)\phi(s),\phi(s))dtds \geq$$

$$\geq \beta^2\int_0^T|\phi(t)|^2dt, \forall\phi(\cdot)\in L_{2,M}(0,T), \tag{100}$$

*де*

$$K(t,s) = \int_0^T q_2^2(\tau)F_1^*(t,\tau)F_1(t,s)d\tau, t,s\in(0,T).$$

*Тоді множина $G_1$ обмежена.*

*Доведення.* Оскільки справедливі нерівності:

$$I_1(\varphi-\hat{\varphi}) \geq \int_0^T q_2^2(t)|\psi(t,\varphi-\hat{\varphi})|^2dt =$$

$$= \int_0^T\int_0^T (K(t,\tau)(\varphi(\tau)-\hat{\varphi}(\tau),\varphi(t)-\hat{\varphi}(t))d\tau dt \geq$$

$$\geq \beta^2\int_0^T|\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)|^2dt,$$

множина $G_1$ включається в множину:

$$\bar{G}_1 = \left\{\varphi : \int_0^T|\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)|^2dt \leq \beta^{-2}(\gamma^2(T)-I(\hat{\varphi}))\right\},$$

яка є обмеженою. □

*Наслідок* 11. Нехай виконується нерівність (100), тоді $L_2$-похибка функції $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$, для якої проводиться спостереження, задовольняє нерівність:

$$\left\{ \int_0^T |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \{\beta^{-2}(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))\}^{\frac{1}{2}}.$$

**Теорема 30.** *Нехай множина $G_1$ — обмежена, тоді функція $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ є гарантованою $L_2$-оцінкою функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$, і при цьому гарантована $L_2$-похибка функції $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ обчислюється за формулою:*

$$\sigma = \sup_{\varphi \in G_2} \|\varphi\| (\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^{\frac{1}{2}},$$

*де*

$$G_2 = \{\varphi : I_1(\varphi) \leq 1\}.$$

*Доведення.* Має місце нерівність:

$$\inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 \geq \sup_{\|l\| \leq 1} \inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))^2.$$

Обчислимо $\sup\limits_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))^2$. Покладемо $\varphi_2 - \hat{\varphi} = \bar{\varphi}_2$, тоді отримаємо вираз:

$$\sup_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))^2 = \sup_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\bar{\varphi}_2 - \hat{\varphi}))^2 =$$

$$= \left[ \sup_{\bar{\varphi}_2 \in \tilde{G}_1} l(\bar{\varphi}_2) + |l(\varphi_1) - l(\hat{\varphi})| \right]^2 \geq \sup_{\bar{\varphi}_2 \in \tilde{G}_1} l^2(\bar{\varphi}_2) =$$

$$= \sup_{\varphi_2 \in G_2} l(\varphi) \left(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi})\right),$$

де

$$\tilde{G}_1 = \{\bar{\varphi} : I_1(\bar{\varphi}) \leq 1 - I(\hat{\varphi})\}.$$

Нижня границя досягається при $\varphi_1 = \hat{\varphi}$, і тоді одержимо рівність:

$$\inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2)) = \sup_{\varphi \in G_1} l^2(\varphi) \left(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}\right).$$

Із справедливості формули

$$\sup_{\|l\| \leq 1} \sup_{\varphi \in G_1} l^2(\varphi) \left(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}\right) = \sup_{\varphi \in G_1} \|\varphi\| \left(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

маємо необхідний вираз для $\sigma$. □

## 3.2 Випадок дискретних спостережень

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1}$, $t_i \in (0,T)$, $i = \overline{1,m+1}$ спостерігаються вектори $x(t_j)$, $t_j \in (0,T)$, $j = \overline{1,m+1}$, для деяких значень $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ та $\eta_j$, $j = \overline{1,m+1}$, де $x(t_j)$, $t_j \in (0,T)$, $j = \overline{1,m+1}$ — розв'язок системи рівнянь:

$$x(t_j) = x^0 + \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) F(t_s,x(t_s)) \Delta t_s \varphi(t_s) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) f(t_s,x(t_s)) \Delta t_s + \eta_j, t_j \in (0,T), j = \overline{1,m},$$

де $F_s = F(t_s,x(t_s))\Delta t_s$, $t_s \in (0,T)$, $s = \overline{1,m}$ — відомі матриці розмірності $N \times M$, $f_s = f(t_s,x(t_s))\Delta t_s$, $t_s \in (0,T)$, $s = \overline{1,m}$ — відомі вектор-функції з простору $R^M$.

Припустимо, що у функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ існує узагальнена похідна, яка належить простору $L_{2,M}(0,T)$, причому $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ належить множині $G_1$, де

$$G_1 = \{\varphi : \Phi_1(\varphi) \le \gamma_1^2(T)\},$$

$$\Phi_1(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t) |\frac{d\varphi(t)}{dt}|^2 dt,$$

а $q_1^2(t)$ — відома функція, $\gamma_1(T)$ — відоме значення.

Нехай вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^*$ належить множині $G_2$, де

$$G_2 = \{\eta : \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 |\eta_j|^2 \le \gamma_2^2(m)\},$$

де $\gamma_2(m)$, $q_{2j}^2$, $j = \overline{1,m}$ — відомі значення.

Позначимо через $G_3$ множину вигляду:

$$G_3 = \{\varphi : \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 |y_j - \psi_j|^2 \le \gamma_2^2(m)\} \cap G_1,$$

де

$$y_j = x(t_j) - x^0 - \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) f_s, j = \overline{1,m},$$

$$\psi_j = \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) F_s \varphi(t_s), j = \overline{1,m}.$$

Знайдемо оцінку оптимальну за функціоналом:

$$\Phi_2(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 |y_j - \psi_j|^2.$$

Позначимо $u(t)$, $t \in (0,T)$ загальну похідну $\frac{d\varphi(t)}{dt}$, тоді

$$\varphi(t_j) = \int_0^{t_j} u(\tau) d\tau + c, t_j \in (0,T), j = \overline{1,m},$$

де $c$ — довільний вектор.

Позначимо $I(u,c)$ функціонал $\Phi_2(\varphi)$.

**Теорема 31.** *Існує єдиний вектор з мінімальною нормою такий, що* $\min\limits_c I(u,c) = I(u,\hat{c})$, *причому* $\hat{c}$ *обчислюються за формулою:*

$$\hat{c} = A^+ b, \tag{101}$$

*де*

$$A = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 L_j^* L_j, b = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 L_j^* \bar{y}_j,$$

$$L_j = \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) F_s, \bar{y}_j = y_j - \int_0^T F_j(\tau) u(\tau) d\tau, j = \overline{1,m},$$

$$F_j(\tau) = \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) \chi_{(0,t_s)}(\tau) F_s, j = \overline{1,m}.$$

*Доведення.* Зауважимо, що оскільки

$$\psi_j = \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s) F_s \varphi(t_s) = \int_0^T F_j(\tau) u(\tau) d\tau + L_j c, j = \overline{1,m},$$

функціонал $I(u,c)$ матиме вигляд:

$$I(u,c) = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 \left| y_j - \int_0^T F_j(\tau) u(\tau) d\tau - L_j c \right|^2.$$

Звідси отримаємо представлення для градієнту функціоналу:

$$\frac{1}{2} gradI(u,c) = -\sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 L_j^* \bar{y}_j.$$

Тоді вектор $\hat{c}$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\left( \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 L_j^* L_j \right) \hat{c} = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 L_j^* \bar{y}_j.$$

□

Уведемо позначення $I_1(u) = I(u,\hat{c})$.

**Лема 5.** *Функціонал $I_1(u)$ має вигляд:*

$$I_1(u) = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 \left| y_{1j} - \int_0^T C_j(\tau) u(\tau) d\tau \right|^2,$$

*де*

$$y_{1j} = y_j - \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 L_j A^+ L_s^* y_s, j = \overline{1,m},$$

$$C_j(\tau) = F_j(\tau) - \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 L_j A^+ L_s^* F_s(\tau), j = \overline{1,m}, \tau \in (0,T).$$

*Доведення.* Зауважимо, що для вектора $\hat{c}$ справедливі рівності:

$$\hat{c} = A^+ b = A^+ \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 L_s^* \bar{y}_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* \left( y_s - \int_0^T F_s(\tau) u(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* y_s - \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* \int_0^T F_s(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Тоді отримуємо рівняння:

$$\hat{c} = \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* y_s - \int_0^T \left( \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* F_s(\tau) \right) u(\tau) d\tau. \qquad (102)$$

Звідси одержимо формулу для функціоналу $I_1(u)$:

$$I_1(u) = \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 \left| y_j - \int_0^T F_j(\tau)u(\tau)d\tau - L_j\hat{c} \right|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 \Bigg| y_j - \int_0^T F_j(\tau)u(\tau)d\tau -$$

$$-L_j \left[ \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* y_s - \int_0^T \left( \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* F_s(\tau) \right) u(\tau)d\tau \right] \Bigg|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 \Bigg| y_j - \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 L_j A^+ L_s^* y_s -$$

$$- \int_0^T \left[ F_j(\tau) - L_j \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 A^+ L_s^* F_s(\tau) \right] u(\tau)d\tau \Bigg|^2.$$

$\square$

Уведемо функціонал:

$$I_\alpha(u) = I_1(u) + \alpha^2 \int_0^T q_1^2(t)|u(t)|^2 dt.$$

**Теорема 32.** *Існує число $\hat{\alpha}$ таке, що*

$$\min_{u \in U} I_1(u) = \min_{u \in U} I_{\hat{\alpha}}(u) = I_{\hat{\alpha}}(\hat{u}_{\hat{\alpha}}),$$

*де*

$$U = \left\{ u : \int_0^T q_1^2(t)|u(t)|^2 dt \le \gamma_1^2(T) \right\},$$

*причому $\hat{\alpha} \equiv 0$, якщо задовольняється вираз:*

$$\int_0^T q_1^2(t)|\hat{u}_0(t)|^2 dt \le \gamma_1^2(T);$$

*в протилежному разі $\hat{\alpha}$ можна знайти з умови*

$$\int_0^T q_1^2(t)|\hat{u}_{\hat{\alpha}}(t)|^2 dt = \gamma_1^2(T).$$

*Доведення.* Справедливість цього твердження випливає із загальних теорем про мінімум квадратичних функціоналів [6]. $\square$

**Теорема 33.** *Існує єдина функція $\bar{u}(t)$, $t \in (0,T)$ така, що $\min\limits_{u \in U} I_\alpha(u) = I_\alpha(\bar{u})$ для $\alpha > 0$, причому ця функція може бути знайдена як розв'язок інтегрального рівняння:*

$$\alpha^2 q_1^2(t)\bar{u}(t)+\int_0^T \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t)C_j(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t)y_{1j}, t \in (0,T). \tag{103}$$

*Доведення.* Інтегральне рівняння (103) випиває з умови:

$$\frac{d}{d\tau} I_\alpha(\bar{u}+\tau v)|_{\tau=0} = 0, \forall v(\cdot) \in L_{2,M}(0,T).$$

Існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння (103) випливає із загальних теорем про мінімум квадратичних функціоналів [6]. $\square$

**Теорема 34.** *Нехай $\bar{u}(t)$, $t \in (0,T)$ — розв'язок інтегрального рівняння (103), тоді він має вигляд:*

$$\alpha^2 q_1^2(t)\bar{u}(t) = -\sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t)\beta_j + \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t)y_{1j}, t \in (0,T), \tag{104}$$

*де вектори $\beta_j$, $j = \overline{1,m}$ є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь:*

$$\alpha^2 \beta_j + \sum_{s=1}^m D_{js}\beta_s = d_j, j = \overline{1,m}.$$

*Тут*

$$D_{js} = \int_0^T q_{2s}^2 q_1^{-2}(\tau)C_j(\tau)C_s^*(\tau)d\tau, j,s = \overline{1,m},$$

$$d_j = \sum_{s=1}^m D_{js}y_{1s}, j = \overline{1,m}.$$

*Доведення.* Із (103) випливає:

$$\alpha^2 \bar{u}(t) = -q_1^{-2}(t) \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 C_j^*(t)\beta_j +$$

$$+q_1^{-2}(t) \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 C_j^*(t) y_{1j}, t \in (0,T),$$

де

$$\beta_j = \int_0^T C_j(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau, j = \overline{1,m}.$$

Звідси отримаємо такі рівності:

$$\alpha^2 \int_0^T C_j(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = -\int_0^T C_j(\tau) q_1^{-2}(\tau) \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 C_s^*(\tau)\beta_s d\tau +$$

$$+\int_0^T q_1^{-2}(\tau) C_j(\tau) \sum_{s=1}^{m} q_{2s}^2 C_s^*(\tau) y_{1s} d\tau, j = \overline{1,m},$$

$$\alpha^2 \beta_j = -\sum_{s=1}^{m} \left[ \int_0^T q_{2s}^2 q_1^{-2}(\tau) C_j(\tau) C_s^*(\tau) d\tau \right] \beta_s +$$

$$+\sum_{s=1}^{m} \left[ \int_0^T q_{2s}^2 q_1^{-2}(\tau) C_j(\tau) C_s^*(\tau) d\tau \right] y_{1s}, j = \overline{1,m},$$

що і потрібно було показати. □

*Наслідок* 12. Має місце рівність:

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \bar{u}(\tau)d\tau + \hat{c}, t \in (0,T),$$

де вектор $\hat{c}$ знаходиться з систем рівнянь (101) та (102) для $u(t) = \bar{u}(t)$, $t \in (0,T)$, а функція $\bar{u}(t)$, $t \in (0,T)$ має вигляд (104).

Нехай функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, $t \in (0,T)$ — вектор-функції з простору $L_{2,M}(0,T)$. Позначимо $I(\varphi)$, $I_1(\varphi)$ та $\sigma(\varphi)$ функціонали:

$$I(\varphi) = \gamma_1^{-2}(T)\Phi_1(\varphi) + \gamma_2^{-2}(m) \sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 |y_j - \psi_j|^2,$$

$$I_1(\varphi) = \gamma_1^{-2}(T)\Phi_1(\varphi) + \gamma_2^{-2}(m)\sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2|\psi_j|^2,$$

$$\sigma(\varphi) = \sup_{\psi\in\bar{G}} \|\varphi - \psi\|,$$

де

$$\bar{G} = \{\varphi : I_1(\varphi) \le 1\},$$

а через $G_-$, $G_+$ — множини вигляду:

$$G_- = \{\varphi : I(\varphi) \le 1\}, G_+ = \{\varphi : I(\varphi) \le 2\}.$$

**Лема 6.** *Припускається, що існує таке додатне число $\gamma$, що для нього виконується умова:*

$$\sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2|\bar{\psi}_j(c)|^2 \ge \gamma|c|^2, \forall c \in R^M,$$

*де*

$$\bar{\psi}_j(c) = \sum_{s=1}^{m} \chi_{(0,t_j)}(t_s)F_s c, j = \overline{1,m}.$$

*Тоді існує єдина функція $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ така, що $\inf\limits_{\varphi\in G_1} I(\varphi) =$ $= I(\hat{\varphi})$.*

*Доведення.* Оскільки

$$\varphi(t_j) = \int_0^{t_j} u(\tau)d\tau + c, t_j \in (0,T), j = \overline{1,m},$$

де $u(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$, $t \in (0,T)$, а $c$ — довільна константа.

Функціонал $I(\varphi) = I(u,c)$ є сильно опуклим, напівнеперервним знизу і таким, що виконується рівність:

$$\lim_{\|u\|+|c|\to\infty} I(u,c) = \infty.$$

Тоді згідно з теоремами з [6] існує функція $\hat{u}(t)$, $t \in (0,T)$ та $\hat{c}$ такі, що

$$\inf_{\varphi\in G_1} I(\varphi) = \inf_{u,c} I(u,c) = I(\hat{u}, \hat{c});$$

при цьому $\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \hat{u}(\tau)d\tau + \hat{c}$, $t \in (0,T)$. □

*Наслідок* 13. Має місце рівність

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^T \hat{u}(\tau)d\tau + \hat{c}, t \in (0,T),$$

де $\hat{c}$ знаходимо із систем рівнянь (101) та (102) для $u(t) = \hat{u}(t)$, $t \in (0,T)$, а функцію $\hat{u}(t)$, $t \in (0,T)$ можна знайти з рівності:

$$(\gamma_2(m)/\gamma_1(T))^2\,\hat{u}(t) = -\sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 C_j^*(t)\beta_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} q_{2j}^2 C_j^*(t) y_{1j}, t \in (0,T).$$

Тут вектори $\beta_j$, $j = \overline{1,m}$ є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(\gamma_2(m)/\gamma_1(T))^2\,\beta_j + \sum_{s=1}^{m} D_{js}\beta_s = d_j, j = \overline{1,m}.$$

**Лема 7.** *Множини $G_-$ та $G_+$ можна представити також у вигляді:*

$$G_- = \{\varphi : I_1(\varphi) \le 1 - I(\hat{\varphi})\},$$

$$G_+ = \{\varphi : I(\varphi) \le 2 - I(\hat{\varphi}\}.$$

*Доведення.* Оскільки $\hat{\varphi} \in Arg \min\limits_{\varphi \in G_1} I(\varphi)$, то із формули Тейлора для функції $g(\tau) = I(\hat{\varphi} + \tau(\varphi - \hat{\varphi}))$ одержимо рівність:

$$I(\varphi) = I(\hat{\varphi}) + I_1(\varphi - \hat{\varphi}).$$

Звідси отримаємо шукані представлення для множин $G_-$ та $G_+$. □

**Теорема 35.** *Мають місце нерівності:*

$$\tilde{\sigma}(1 - I(\hat{\varphi}))^{1/2} \le \inf_{\varphi \in \bar{G}} \sigma(\varphi) \le \tilde{\sigma}(2 - I(\hat{\varphi}))^{1/2},$$

*де* $\tilde{\sigma} = \sup\limits_{\varphi \in \bar{G}} \|\varphi\|$.

*Доведення.* Покажемо спочатку, що справедлива оцінка

$$\inf_{\varphi\in\bar G}\sigma(\varphi)\geq\tilde\sigma(1-I(\hat\varphi))^{1/2}.$$

Оскільки $G_-\subset\bar G$, то

$$\sigma(\varphi)=\sup_{\psi\in\bar G}\|\varphi-\psi\|\geq\sup_{\psi\in G_-}\|\varphi-\psi\|.$$

Тоді із рівності

$$\|\varphi-\psi\|=\sup_{\|l\|=1}|(l,\varphi)-(l,\psi)|,$$

де $(l,\varphi)$ та $(l,\psi)$ — скалярні добутки функцій $l(t)$, $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, $t\in(0,T)$ в просторі $L_{2,M}(0,T)$, одержимо, що

$$\sup_{\psi\in G_-}\|\varphi-\psi\|=\sup_{\|l\|=1}\sup_{\psi\in G_-}|(l,\varphi)-(l,\psi)|=$$

$$=\sup_{\|l\|=1}(\sigma_1+|(l,\varphi)-(l,\hat\psi)|)\geq\sup_{\|l\|=1}\sigma_1.$$

Тут

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\left[\sup_{\psi\in G_-}(l,\psi)+\inf_{\psi\in G_-}(l,\psi)\right],$$

$$(l,\hat\psi)=\frac{1}{2}\left[\sup_{\psi\in G_-}(l,\psi)-\inf_{\psi\in G_-}(l,\psi)\right],$$

З леми 7 випливає, що

$$\sigma_1=\sup_{\psi\in\bar G}(l,\psi)\left[1-I(\hat\varphi)\right]^{1/2}.$$

Таким чином

$$\sup_{\|l\|=1}\sigma_1=\sup_{\psi\in\bar G}\sup_{\|l\|=1}(l,\psi)\left[1-I(\hat\varphi)\right]^{1/2}=$$

$$=\sup_{\psi\in\bar G}\|\psi\|\left[1-I(\hat\varphi)\right]^{1/2},$$

отримуємо шукану нерівність.

Подібним чином доводиться справедливість виразу:

$$\inf_{\varphi\in\bar G}\sigma(\varphi)\leq\tilde\sigma(2-I(\hat\varphi))^{1/2}.$$

□

*Зауваження* 5. Оцінка $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$, що задовольняє умову $\hat{\varphi} \in Arg \min\limits_{\varphi \in \bar{G}} I(\varphi)$, є наближеною до гарантованої оцінки функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$.

# Розділ 4 Гарантовані оцінки нестаціонарних параметрів різницевих рівнянь в умовах невизначеності

## 4.1 Постановка задачі

Нехай спостерігаються вектори $x(k) \in R^N$, $N \geq 1$, $k = \overline{1, m+1}$ при невідомих параметрах $a_k \in R^M$, $M \geq 1$, $k = \overline{1, m}$, які є розв'язками різницевих рівнянь:

$$x(k+1) = f(k,x(k))a_k + g(k,x(k)) + \eta_k, k = \overline{1,m},$$

де $f(k,x(k)$, $k = \overline{1, m}$ — задані матриці розмірності $N \times M$, $g(k,x(k)) \in R^N$, $k = \overline{1, m}$ — відомі вектори, $\eta_k$, $k = \overline{1, m}$ — невідомі вектори завад. Відомо, що $\Delta_+ a_k \in U_k \subseteq R^M$, $k = \overline{1, m-1}$, $\Delta_+ a_k = a_{k+1} - a_k$, $k = \overline{1, m-1}$. Припускаємо, що $\eta_k \in V_k \subseteq R^N$, $k = \overline{1, m}$.

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_a = \{a : (x(k+1) - f(k,x(k))a_k - g(k,x(k))) \in V_k, k = \overline{1,m},$$

$$\Delta_+ a_j = a_{j+1} - a_j, j = \overline{1, m-1}\},$$

де $a = (a_1, \ldots, a_m)$.

**Означення 4.** Матриці $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \in G_a$ назвемо *апостеріорними оцінками* матриці $a$.

Нехай $G_a^-$ та $G_a^+$ множини, для яких виконуються умови $G_a^- \subseteq G_a \subseteq G_a^+$.

**Означення 5.** Матриці $a^- = (a_1^-, \ldots, a_m^-) \in G_a^-$ та $a^+ = (a_1^+, \ldots, a_m^+) \in G_a^+$ називаються *нижніми та верхніми апостеріорними оцінками* матриці $a$.

Нехай множини $U_j$, $j = \overline{1,m-1}$ та $V_k$, $k = \overline{1,m}$ — обмежені, тоді існують послідовності додатних скалярних величин $q_{1j}^- > 0$, $q_{1j}^+ > 0$, $j = \overline{1,m-1}$, $q_{2k}^- > 0$, $q_{2k}^+ > 0$, $k = \overline{1,m}$ та додатні числа $\gamma_1(m) > 0$, $\gamma_2(m) > 0$ такі, що :

$$G_a^- = \left\{ a : \sum_{k=1}^{m} q_{2k}^- |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^- |\Delta_+ a_k|^2 \leq \gamma_1(m) \right\},$$

$$G_a^+ = \left\{ a : \sum_{k=1}^{m} q_{2k}^+ |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^+ |\Delta_+ a_k|^2 \leq \gamma_2(m) \right\},$$

де

$$y(k) = x(k+1) - g(k,x(k)), f_k = f(k,x(k)), k = \overline{1,m}.$$

Для множин $G_a^-$ та $G_a^+$ також справедливі представлення:

$$G_a^- = G_{a_1}^- \times \cdots \times G_{a_m}^-, a_k^- \in G_{a_k}^- \subseteq R^M, k = \overline{1,m},$$

$$G_a^+ = G_{a_1}^+ \times \cdots \times G_{a_m}^+, a_k^+ \in G_{a_k}^+ \subseteq R^M, k = \overline{1,m}.$$

Уведемо функції:

$$\Phi^-(a) = \sum_{k=1}^{m} q_{2k}^- |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^- |\Delta_+ a_k|^2, a \in G_a^-,$$

$$\Phi^+(a) = \sum_{k=1}^{m} q_{2k}^+ |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^+ |\Delta_+ a_k|^2, a \in G_a^+.$$

**Означення 6.** *Верхні та нижні гарантовані оцінки* $\bar{a}^- = (\bar{a}_1^-, \ldots, \bar{a}_m^-)$ та $\bar{a}^+ = (\bar{a}_1^+, \ldots, \bar{a}_m^+)$ матриці $a$ визначаються з умови:

$$\max_{a_k^- \in G_{a_k}^-} \|\bar{a}_k^- - a_k^-\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^-} \max_{a_k^- \in G_{a_k}^-} \|a_k - a_k^-\| = \sigma_k^-, k = \overline{1,m},$$

$$\max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \|\bar{a}_k^+ - a_k^+\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^+} \max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \|a_k - a_k^+\| = \sigma_k^+, k = \overline{1,m},$$

а величини $\sigma_k^-$ та $\sigma_k^+$, $k = \overline{1,m}$ називаються *верхніми та нижніми похибками оцінювання.*

**Лема 8.** *Має місце представлення:*

$$G_a^- = \left\{a : (A^-(a - \bar{a}^-), a - \bar{a}^-) \le \gamma_1(m) - \Phi^-(\bar{a}^-)\right\},$$

$$G_a^+ = \left\{a : (A^+(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+) \le \gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+)\right\},$$

*де матриці* $A^- = \left\{A_{ij}^-\right\}_{i,j=1}^m$ *та* $A^+ = \left\{A_{ij}^+\right\}_{i,j=1}^m$ *є трьохдіагональними, причому:*

$$A_{11}^- = q_{11}^- + q_{21}^- f_1^* f_1, A_{12}^- = -q_{11}^-,$$

$$A_{11}^+ = q_{11}^+ + q_{21}^+ f_1^* f_1, A_{12}^+ = -q_{11}^+,$$

$$A_{k,k-1}^- = -q_{1,k-1}^-, A_{kk}^- = q_{1,k-1}^- + q_{1k}^- + q_{2k}^- f_k^* f_k, k = \overline{2,m-1},$$

$$A_{k,k-1}^- = -q_{1,k}^-, A_{k,k-1}^+ = -q_{1,k-1}^+, k = \overline{2,m-1},$$

$$A_{kk}^+ = q_{1,k-1}^+ + q_{1k}^+ + q_{2k}^+ f_k^* f_k, A_{k,k-1}^+ = -q_{1,k}^+, k = \overline{2,m-1},$$

$$A_{m,m-1}^- = -q_{1,m-1}^-, A_{mm}^- = q_{1,m-1}^- + q_{2m}^- f_m^* f_m,$$

$$A_{m,m-1}^+ = -q_{1,m-1}^+, A_{mm}^+ = q_{1,m-1}^+ + q_{2m}^+ f_m^* f_m.$$

*Доведення.* Спочатку покажемо справедливість представлення для множини $G_a^+$. Оскільки $\bar{a}^+$ — верхня гарантована оцінка, то $(\Phi^+)'(\bar{a}^+) = 0$. Розклавши функцію $\Phi^+(a)$, $a \in G_a^+$ в ряд Тейлора, отримаємо:

$$\Phi^+(a) = \Phi^+(\bar{a}^+) + \frac{1}{2}((\Phi^+)''(\bar{a}^+)(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+),$$

де $(\Phi^+)''(\bar{a}^+)$ — матриця других похідних, яка дорівнює $2A^+$.

Тоді для множини $G_a^+$ справедливе представлення:

$$G_a^+ = \left\{a : (A^+(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+) \le \gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+)\right\},$$

що і потрібно було показати. Для множини $G_a^-$ доведення аналогічне. □

**Теорема 36.** *Справедливі рівності:*

$$\sigma_k^- = \lambda_{max}^{1/2}(H_k(A^-)^{-1}H_k^*)(\gamma_1(m) - \Phi^-(\bar{a}^-))^{1/2}, k = \overline{1,m},$$

$$\sigma_k^+ = \lambda_{max}^{1/2}(H_k(A^+)^{-1}H_k^*)(\gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2}, k = \overline{1,m},$$

*де* $\lambda_{max}(H_k(A^+)^{-1}H_k^*)$ *— максимальні власні числа матриць* $H_k(A^+)^{-1}H_k^*$, $k = \overline{1,m}$, *а* $H_k$, $k = \overline{1,m}$ *— оператори проектування, для яких виконуються умови:*

$$H_k a = a_k, k = \overline{1,m}.$$

*Доведення.* Оскільки алгоритми знаходження верхніх та нижніх похибок оцінок для таких множин подібні, то знайдемо вирази тільки для $\sigma_k^+$, $k=\overline{1,m}$.

Має місце представлення:

$$\sigma_k^+ = \max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \|\bar{a}_k^+ - a_k^+\| = \max_{a^+ \in G_a^+} \|H_k(\bar{a}^+ - a^+\|, k=\overline{1,m}.$$

Тоді справедливі перетворення:

$$\sigma_k^+ = \max_{a^+ \in G_a^+} \|H_k(\bar{a}^+ - a^+\| =$$

$$= \max_{(A^+(a^+-\bar{a}^+), a^+-\bar{a}^+)\le 1} \|H_k(\bar{a}^+ - a^+\| =$$

$$= \max_{\|p\|\le 1} \max_{(A^+(a^+-\bar{a}^+), a^+-\bar{a}^+)\le 1} (p, H_k(\bar{a}^+ - a^+)\times$$

$$\times(\gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2} =$$

$$= \max_{\|p\|\le 1} (H_k(A^+)^{-1}H_k^* p, p)(\gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2} =$$

$$= \lambda_{max}^{1/2}(H_k(A^+)^{-1}H_k^*)(\gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2}, k=\overline{1,m},$$

де $p$ — матриця розмірності $M\times m$, $\|p\|\le 1$. □

При обмежених множинах $U_j$, $j=\overline{1,m-1}$ та $V_k$, $k=\overline{1,m}$, множину $G_a$ можна представити у вигляді:

$$G_a = \left\{ a : \sum_{k=1}^{m} q_{2k}|x(k+1) - f(k,x(k))a_k - g(k,x(k))|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}|a_{k+1} - a_k|^2 \le \beta \right\}, \qquad (105)$$

де $q_{1j}$, $j=\overline{1,m-1}$ та $q_{2k}$, $k=\overline{1,m}$, $\beta$ – відомі скалярні величини.

Для множини $G_a$ також справедливе представлення:

$$G_a = G_{a_1}\times\cdots\times G_{a_m}, a_k \in G_{a_k} \subseteq R^M, k=\overline{1,m}.$$

Уведемо функцію вигляду:

$$\Phi(a) = \sum_{k=1}^{m} q_{2k}|y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}|a_{k+1} - a_k|^2. \qquad (106)$$

**Означення 7.** Матрицю $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m)$, яка знаходиться з умови $\hat{a} \in Arg \min\limits_{a \in G_a} \Phi(a)$, назвемо *оптимальною оцінкою* за функцією $\Phi(a)$.

**Означення 8.** Назвемо *гарантованою оцінкою* параметрів $a_k$, $k = \overline{1,m}$ матрицю $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$, яка знаходиться з умови:

$$\max_{a'' \in G_a} \|\tilde{a} - a''\| = \min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} \|a' - a''\| = \sigma,$$

а $\sigma$ назвемо *похибкою гарантованої оцінки* $\tilde{a}$ (тут $\|A\| = \{SpAA^*\}^{1/2}$).

Уведемо матрицю $u = (u_1, \ldots, u_{m-1})$, $u_j = a_{j+1} - a_j$, $j = \overline{1,m-1}$, $a_1 \in G_{a_1}$ і позначимо через $G_1$ множину:

$$G_1 = \left\{ (u,a_1) : \sum_{k=1}^{m} q_{2k} |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k} |u_k|^2 \le \beta \right\}.$$

Множину $G_1$ можна також представити у вигляді:

$$G_1 = U_{(1)} \times \cdots \times U_{(m-1)} \times G_{a_1},$$

$$u_i \in U_{(i)} \subseteq R^M, i = \overline{1,m-1}.$$

Задача знаходження оптимальної за функцією $\Phi(a)$ оцінки $\hat{a}$ еквівалентна задачі знаходження $(\hat{u}, \hat{a}_1) \in Arg \min\limits_{(u,a1) \in G_1} I(u,a_1)$, де

$$I(u,a_1) = \sum_{k=1}^{m} q_{2k} |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k} |u_k|^2. \tag{107}$$

## 4.2 Знаходження гарантованих оцінок параметрів різницевих рівнянь

Спочатку знайдемо оптимальну за функцією $\Phi(a)$ оцінку $\hat{a}$.

**Теорема 37.** *Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ обчислюється за формулою:*

$$\hat{a} = A^{-1} b, \tag{108}$$

*де $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ – трьохдіагональна матриця з елементами:*

$$A_{k,k-1} = -q_{1,k-1}, A_{k,k} = q_{1,k-1} + q_{1,k} + q_{2k} f_k^* f_k, k = \overline{2,m-1},$$

$$A_{k,k+1} = -q_{1k}, k = \overline{2,m-1},$$
$$A_{11} = q_{11} + q_{21} f_1^* f_1, A_{12} = -q_{11},$$
$$A_{m,m-1} = -q_{m,m-1}, A_{m,m} = q_{m,m-1} + q_{2m} f_m^* f_m;$$
$$b = (q_{21} f_1^* y(1) \dots q_{2k} f_k^* y(k) \dots q_{2m} f_m^* y(m))^*.$$

*Доведення.* Знайдемо $\hat{a} \in Arg \min\limits_{a \in G_a} \Phi(a)$ з умови

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \Phi(a + \tau v)|_{\tau=0} = 0, v \in R^{M \times m},$$

яка еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{c} (q_{11} + q_{21} f_1^* f_1)\hat{a}_1 - q_{11}\hat{a}_2 = q_{21} f_1^* y(1), \\ -q_{1,k-1}\hat{a}_{k-1} + (q_{1,k-1} + q_{1k} + q_{2k} f_k^* f_k)\hat{a}_k - \\ -q_{1k}\hat{a}_{k+1} = q_{2k} f_k^* y(k), k = \overline{2.m-1}, \\ -q_{1,m-1}\hat{a}_{m-1} + (q_{1,m-1} + q_{2m} f_m^* f_m)\hat{a}_m = q_{2m} f_m^* y(m). \end{array} \right. \tag{109}$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (109) можна представити у матричному вигляді:

$$A\hat{a} = b. \tag{110}$$

Розв'язок системи рівнянь (110) має вигляд:

$$\hat{a} = A^{-1} b,$$

що і потрібно було показати. □

**Лема 9.** *Множину $G_a$ можна записати також у вигляді:*

$$G_a = \{a : (A(a - \hat{a}), a - \hat{a}) \le \beta - \Phi(\hat{a})\}.$$

*Доведення.* Оскільки $\hat{a}$ точка мінімуму функції $\Phi(a)$, то $\Phi'(\hat{a}) = 0$. Розклавши (106) в ряд Тейлора, одержимо вираз:

$$\Phi(a) = \Phi(\hat{a}) + \frac{1}{2}(\Phi''(\hat{a})(a - \hat{a}), a - \hat{a}),$$

де $\Phi''(\hat{a})$ — матриця других похідних, яка дорівнює $2A$.

Тоді для множини $G_a$ справедливе представлення:

$$G_a = \{a : (A(a - \hat{a}), a - \hat{a}) \le \beta - \Phi(\hat{a})\},$$

що і потрібно було довести. □

**Теорема 38.** *Оптимальна за функцією* $\Phi(a)$ *оцінка* $\hat{a}$ *є гарантованою оцінкою для матриці* $a$, *і при цьому для похибки гарантованої оцінки справедлива рівність:*

$$\sigma = \lambda_{max}^{1/2}(A^{-1})(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2},$$

*де* $\lambda_{max}(A^{-1})$ *найбільше власне число матриці* $A^{-1}$.

*Доведення.* Має місце нерівність:

$$\min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} \|a' - a''\| \geq \max_{\|l\| \leq 1} \min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} ((l,a') - (l,a''))^2,$$

де $l$ — матриця розмірності $M \times m$, норма якої $\|l\| \leq 1$.

Обчислимо $\max\limits_{a'' \in G_a} ((l,a') - (l,a''))^2$. Поклавши $\bar{a} = a'' - \hat{a}$, отримаємо співвідношення:

$$\max_{a'' \in G_a} ((l,a') - (l,a''))^2 = \max_{\bar{a} \in \bar{G}_a} ((l,a') - (l,\bar{a} + \hat{a}))^2 =$$

$$= \left[ \max_{\bar{a} \in \bar{G}_a} (l,\bar{a}) + |(l,a') - (l,\hat{a})| \right]^2 \geq$$

$$\geq \max_{\bar{a} \in \bar{G}_a} (l,\bar{a})^2 = \max_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} (l,\bar{a})^2 (\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2}, \qquad (111)$$

де $\bar{G}_a = \{\bar{a} : (A\bar{a},\bar{a}) \leq \beta - \Phi(\hat{a})\}$.

Нижня границя досягається при $a' = \hat{a}$, тоді з (111) одержимо:

$$\max_{\|l\| \leq 1} \min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} ((l,a') - (l,a''))^2 =$$

$$= \max_{\|l\| \leq 1} \min_{a' \in G_a} \max_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} (l,\bar{a})^2 (\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2} =$$

$$= \max_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} \|\bar{a}\| (\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2}.$$

Для $\max\limits_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} \|\bar{a}\|$ справедливі рівності:

$$\max_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} \|\bar{a}\| = \max_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} \max_{\|p\| \leq 1} (p,\bar{a}) = \max_{\|p\| \leq 1} \max_{(A\bar{a},\bar{a}) \leq 1} (p,\bar{a}),$$

де $p$ — матриця розмірності $M \times m$, $\|p\| \leq 1$.

З узагальненої нерівності Коші-Буняковського випливає:

$$(p,\bar{a}) \leq (A\bar{a},\bar{a})^{1/2} (A^{-1}p,p)^{1/2} \leq (A^{-1}p,p)^{1/2}.$$

Тоді

$$\max_{(A\bar{a},\bar{a})\le 1}\|\bar{a}\| = \max_{\|p\|\le 1}(A^{-1}p,p)^{1/2} = \lambda_{max}^{1/2}(A^{-1}). \tag{112}$$

З (112) отримаємо представлення для похибки гарантованої оцінки матриці $a$:

$$\sigma = \min_{a'\in G_a}\max_{a''\in G_a}\|a'-a''\| = \max_{a''\in G_a}\|\hat{a}-a''\| =$$

$$= \lambda_{max}^{1/2}(A^{-1})(\beta-\Phi(\hat{a}))^{1/2},$$

що і потрібно було показати. □

## 4.3 Інтерполяція параметрів різницевих рівнянь

В цьому розділі задачу знаходження гарантованої оцінки $\bar{a}$ на основі спостережень $x(k)$, $k=\overline{1,m+1}$ розв'яжемо за допомогою функцій Беллмана.

**Теорема 39.** *Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ знаходиться за формулами:*

$$\hat{a}_{j+1} = \hat{a}_j + \hat{u}_j, j=\overline{1,m-1}; \tag{113}$$

$$\hat{a}_1 = [q_{22}(E+A_2^*D_2^*)f_2^*f_2(E+D_2A_2) + q_{21}f_1^*f_1 +$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^*f_k^*f_kW_{k2} + \sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^*A_{k+1}^*D_{k+1}^*D_{k+1}A_{k+1}W_{k2} +$$

$$+q_{11}A_2^*D_2^*D_2A_2 + q_{12}(E+A_2^*D_2^*)A_3^*D_3^*D_3A_3(E+D_2A_2)]^{-1}\times$$

$$\times[q_{21}f_1^*y(1) + q_{22}(E+A_2^*D_2^*)f_2^*(y(2)-f_2D_2\varphi_2) +$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^*f_k^*(y(k)-f_kD_k\varphi_k - f_k\sum_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}) -$$

$$-\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^*A_{k+1}^*D_{k+1}^*Z_{k+1} - q_{11}A_2^*D_2^*D_2\varphi_2 -$$

$$-q_{12}(E+A_2^*D_2^*)A_3^*D_3^*(D_3\varphi_3 + D_3A_3D_2\varphi_2)];$$

$$\hat{u}_k = D_{k+1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1}\hat{a}_k), k=\overline{1,m-1};$$

$$\varphi_k = -2q_{2k}f_k^*y(k) + 2q_{1k}A_{k+1}^*D_{k+1}^*Q_{k+1} +$$

$$+S_{k+1}^{*}A_{k+1}Q_{k+1}+S_{k+1}^{*}\varphi_{k+1}, k=\overline{m-1,1};$$

$$P_k=q_{2k}f_k^{*}f_k+q_{1k}A_{k+1}^{*}D_{k+1}^{*}D_{k+1}A_{k+1}+$$

$$+S_{k+1}^{*}P_{k+1}S_{k+1}, k=\overline{m-1,1},$$

$$P_m=q_{2m}f_m^{*}f_m, \varphi_m=-2q_{2m}f_m^{*}y(m);$$

$$A_{k+1}=P_{k+1}^{*}+P_{k+1}, k=\overline{m-1,1};$$

$$D_{k+1}=-(2q_{1k}E+A_{k+1})^{-1}, k=\overline{m-1,1};$$

$$S_{k+1}=E+D_{k+1}A_{k+1}, k=\overline{m-1,1};$$

$$Q_{k+1}=D_{k+1}\varphi_{k+1}, k=\overline{m-1,1};$$

$$W_{ki}=\prod_{j=i}^{k}E+D_jA_j, k,i=\overline{3,m-1};$$

$$Z_{k+1}=D_{k+1}(\varphi_{k+1}+A_{k+1}D_k\varphi_k+$$

$$+A_{k+1}\sum_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}), k=\overline{3,m-1};$$

*де* $E$ *— одинична матриця розмірності* $M\times M$.

*Доведення.* Функція Беллмана для задачі (107) має вигляд:

$$B_k(z)=\inf_{(u_k,\dots,u_{m-1})\in U_{(k)}\times\cdots\times U_{(m-1)}}\Big\{q_{2k}|y(k)-f_kz|^2+q_{1k}|u_k|^2+$$

$$+\sum_{l=k+1}^{m-1}\left[q_{2l}|y(l)-f_la_l|^2+q_{1l}|u_l|^2\right]+q_{2m}|y(m)-f_ma_m|^2\Bigg\},$$

$$z=a_k, k=\overline{m-1,1},$$

$$B_m(z_1)=q_{2m}|y(m)-f_mz_1|^2, z_1=a_m;$$

та задовольняє рівняння Беллмана:

$$B_k(z)=\min_{\tilde v\in U_{(k)}}\left\{q_{2k}|y(k)-f_ka_k|^2+q_{1k}|\tilde v|^2+\right.$$

$$\left.+B_{k+1}(z+\tilde v)\right\}, k=\overline{m-1,1}.$$

Шукаємо функцію Беллмана у вигляді квадратичної форми:

$$B_k(z)=(P_kz,z)+(\varphi_k,z)+d_k, k=\overline{m-1,1}, \tag{114}$$

тоді отримуємо:

$$P_m = q_{2m} f_m^* f_m,$$

$$\varphi_m = -2q_{2m} f_m^* y(m),$$

$$d_m = q_{2m} |y(m)|^2.$$

Рівняння Беллмана набуває вигляду:

$$(P_k z,z) + (\varphi_k,z) + d_k = \Theta_k(\nu_k),$$

де

$$\Theta_k(v_k) = q_{2k}|y(k) - f_k z|^2 + q_{1k}|v_k|^2 + (P_{k+1}(z+v_k), z+v_k)+$$

$$+(\varphi_{k+1}, z+v_k) + d_{k+1}, k = \overline{m-1,1},$$

$$\nu_k \in Arg \min_{v_k \in U_{(k)}} \Theta_k(v_k), k = \overline{m-1,1}.$$

Знайдемо точки екстремуму функції $\Theta_k(v_k)$, $k = \overline{m-1,1}$:

$$\frac{d}{d\tau}\Theta_k(\nu_k + \tau p)|_{\tau=0} = 2q_{1k}(\nu_k,p) + (\varphi_{k+1},p)+$$

$$+ ((P_{k+1}^* + P_{k+1})(z+\nu_k),p) = 0, p \in R^M, k = \overline{m-1,1}. \qquad (115)$$

З (115) отримаємо рівності:

$$2q_{1k}\nu_k + \varphi_{k+1} + (P_{k+1}^* + P_{k+1})(z+\nu_k) = 0, k = \overline{m-1,1},$$

$$(2q_{1k}E + A_{k+1})\nu_k = -\varphi_{k+1} - A_{k+1}z, k = \overline{m-1,1}.$$

Справедливі наступні перетворення:

$$\nu_k = -(2q_{1k}E + A_{k+1})^{-1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1}z) =$$

$$= D_{k+1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1}z) = D_{k+1}\varphi_{k+1}+$$

$$+D_{k+1}A_{k+1}z, k = \overline{m-1,1}.$$

Підставимо отриманий для точки екстремуму вираз в (114):

$$(P_k z,z) + (\varphi_k,z) + d_k = q_{2k}|y(k) - f_k z|^2+$$

$$+q_{1k}|D_{k+1}\varphi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z|^2+$$

$$+(P_{k+1}(z + D_{k+1}\varphi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z), z+$$

$$+D_{k+1}\varphi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z)+$$
$$+(\varphi_{k+1}, z + D_{k+1}\varphi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z) + d_{k+1}, k = \overline{m-1,1}.$$

Згрупувавши в скалярних добутках вектори при $z$, отримаємо:

$$(P_k z,z) + (\varphi_k,z) + d_k = q_{2k}|y(k) - f_k z|^2+$$
$$+q_{1k}|D_{k+1}\varphi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z|^2+$$
$$+(P_{k+1}(D_{k+1}\varphi_{k+1} + (E + D_{k+1}A_{k+1})\times$$
$$\times z), D_{k+1}\varphi_{k+1} + (E + D_{k+1}A_{k+1})z)+$$
$$+(\varphi_{k+1}, D_{k+1}\varphi_{k+1} + (E + D_{k+1}A_{k+1})z) + d_{k+1} =$$
$$= q_{2k}|y(k) - f_k z|^2 + q_{1k}|Q_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z|^2+$$
$$+(P_{k+1}(Q_{k+1} + S_{k+1}z), Q_{k+1} + S_{k+1}z)+$$
$$+(\varphi_{k+1}, Q_{k+1} + S_{k+1}z) + d_{k+1}, k = \overline{m-1,1}.$$

Останній вираз можна записати у вигляді:

$$(P_k z,z) + (\varphi_k,z) + d_k = q_{2k}|y(k)|^2 - 2q_{2k}(f_k^* y(k),z) + q_{2k}(f_k^* f_k z,z)+$$
$$+q_{1k}|Q_{k+1}|^2 + 2q_{1k}(A_{k+1}^* D_{k+1}^* Q_{k+1},z)+$$
$$+q_{1k}(A_{k+1}^* D_{k+1}^* D_{k+1}A_{k+1}z,z) + (P_{k+1}Q_{k+1},Q_{k+1})+$$
$$+(S_{k+1}^* A_{k+1}Q_{k+1},z) + (S_{k+1}^* P_{k+1}S_{k+1}z,z) + (\varphi_{k+1}, Q_{k+1})+$$
$$+(S_{k+1}^*\varphi_{k+1},z) + d_{k+1}, k = \overline{m-1,1},$$

з якого отримуються матриці $P_k$, $k = \overline{m-1,1}$, вектори $\varphi_k$, $k = \overline{m-1,1}$ та скаляри $d_k$, $k = \overline{m-1,1}$:

$$P_k = q_{2k}f_k^* f_k + q_{1k}A_{k+1}^* D_{k+1}^* D_{k+1}A_{k+1}+$$
$$+S_{k+1}^* P_{k+1}^* S_{k+1}, k = \overline{m-1,1},$$
$$\varphi_k = -2q_{2k}f_k^* y(k) + 2q_{1k}A_{k+1}^* D_{k+1}^* Q_{k+1}+$$
$$+S_{k+1}^* A_{k+1}Q_{k+1} + S_{k+1}^*\varphi_{k+1}, k = \overline{m-1,1},$$
$$d_k = q_{2k}|y(k)|^2 + q_{1k}|Q_{k+1}|^2+$$
$$+(P_{k+1}Q_{k+1} + \varphi_{k+1},Q_{k+1}) + d_{k+1}, k = \overline{m-1,1}.$$

Тоді вектори $\hat{u}_k$, $k = \overline{1,m-1}$ обчислюються за формулами:

$$\hat{u}_k = D_{k+1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1}\hat{a}_k), k = \overline{1,m-1}. \qquad (116)$$

Знайдемо $\hat{a}_1 \in Arg \min\limits_{a_1 \in G_{a_1}} I(\hat{u},a_1)$. З (116) отримуємо представлення для $\hat{a}_k$, $k = \overline{2,m}$ та $\hat{u}_k$, $k = \overline{1,m-1}$:

$$\hat{a}_k = D_k\varphi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1} + W_{k2}a_1, k = \overline{3,m},$$

$$\hat{u}_k = Z_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}a_1, k = \overline{3,m-1},$$

$$\hat{a}_2 = D_2\varphi_2 + (E + D_2A_2)a_1, \hat{u}_1 = D_2\varphi_2 + D_2A_2a_1,$$

$$\hat{u}_2 = D_3\varphi_3 + D_3A_3D_2\varphi_2 + D_3A_3(E + D_2A_2)a_1.$$

Функцію (107) можна представити також у вигляді:

$$I(\hat{u}, a_1) = q_{21}|y(1) - f_1a_1|^2 + q_{22}|y(2) -$$

$$-f_2(D_2\varphi_2 + (E + D_2A_2)a_1)|^2 +$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}|y(k) - f_k(D_k\varphi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1} + W_{k2}a_1)|^2 +$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}|Z_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}a_1|^2 + q_{11}|D_2\varphi_2 + D_2A_2a_1|^2 +$$

$$+q_{12}|D_3\varphi_3 + D_3A_3D_2\varphi_2 + D_3A_3(E + D_2A_2)a_1|^2.$$

Знайдемо вектор $\hat{a}_1$ з умови $\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I(\hat{u}, \hat{a}_1 + \tau v)|_{\tau=0} = 0$, $v \in R^M$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I(\hat{u}, \hat{a}_1 + \tau v)|_{\tau=0} =$$

$$= -q_{21}(f_1^*(y(1) - f_1\hat{a}_1), v) -$$

$$-q_{22}((E + A_2^*D_2^*)f_2^*(y(2) - f_2(D_2\varphi_2 + (E + D_2A_2)\hat{a}_1)), v) -$$

$$-\sum_{k=3}^{m} q_{2k}(W_{k2}^*f_k^*(y(k) - f_k(D_k\varphi_k +$$

$$+\sum_{j=k}^{3} W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1} + W_{k2}\hat{a}_1)), v) +$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}(W_{k2}^* A_{k+1}^* D_{k+1}^*(Z_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}\hat{a}_1),v)+$$

$$+q_{11}(A_2^* D_2^*(D_2\varphi_2 + D_2A_2\hat{a}_1),v)+$$

$$+q_{12}((E + A_2^* D_2^*)A_3^* D_3^*(D_3\varphi_3+$$

$$+D_3A_3D_2\varphi_2 + D_3A_3(E + D_2A_2)\hat{a}_1),v) = 0.$$

Звідси отримаємо рівності:

$$-q_{21}f_1^*(y(1) - f_1\hat{a}_1) - q_{22}(E + A_2^* D_2^*)\times$$

$$\times f_2^*(y(2) - f_2(D_2\varphi_2 + (E + D_2A_2)\hat{a}_1))-$$

$$-\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^* f_k^*(y(k) - f_k(D_k\varphi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1} + W_{k2}\hat{a}_1))+$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^* A_{k+1}^* D_{k+1}^*(Z_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}\hat{a}_1)+$$

$$+q_{11}A_2^* D_2^*(D_2\varphi_2 + D_2A_2\hat{a}_1) + q_{12}(E + A_2^* D_2^*)\times$$

$$\times A_3^* D_3^*(D_3\varphi_3 + D_3A_3D_2\varphi_2 + D_3A_3(E + D_2A_2)\hat{a}_1) =$$

$$= -q_{21}f_1^* y(1) + q_{21}f_1^* f_1\hat{a}_1 - q_{22}(E + A_2^* D_2^*)f_2^*(y(2) - f_2D_2\varphi_2)+$$

$$+q_{22}(E + A_2^* D_2^*)f_2^* f_2(E + D_2A_2)\hat{a}_1 + \sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^* f_k^* f_k W_{k2}\hat{a}_1-$$

$$-\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^* f_k^*(y(k) - f_k(D_k\varphi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}))+$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^* A_{k+1}^* D_{k+1}^* Z_{k+1}+$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^* A_{k+1}^* D_{k+1}^* D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}\hat{a}_1+$$

$$+q_{11}A_2^* D_2^* D_2\varphi_2 + q_{11}A_2^* D_2^* D_2A_2\hat{a}_1+$$

$$+q_{12}(E + A_2^* D_2^*)A_3^* D_3^*(D_3\varphi_3 + D_3A_3D_2\varphi_2)+$$

$$+q_{12}(E + A_2^* D_2^*)A_3^* D_3^* D_3A_3(E + D_2A_2)\hat{a}_1 = 0,$$

з яких випливає рівняння:

$$[q_{22}(E+A_2^*D_2^*)f_2^*f_2(E+D_2A_2)+q_{21}f_1^*f_1+$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^*f_k^*f_kW_{k2}+$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^*A_{k+1}^*D_{k+1}^*D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}+q_{11}A_2^*D_2^*D_2A_2+$$

$$+q_{12}(E+A_2^*D_2^*)A_3^*D_3^*D_3A_3(E+D_2A_2)]\hat{a}_1=$$

$$=q_{21}f_1^*y(1)+q_{22}(E+A_2^*D_2^*)f_2^*(y(2)-f_2D_2\varphi_2)+$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^*f_k^*(y(k)-f_kD_k\varphi_k-f_k\sum_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1})-$$

$$-\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^*A_{k+1}^*D_{k+1}^*Z_{k+1}-q_{11}A_2^*D_2^*D_2\varphi_2-$$

$$-q_{12}(E+A_2^*D_2^*)A_3^*D_3^*(D_3\varphi_3+D_3A_3D_2\varphi_2).$$

Отже, вектор $\hat{a}_1$ обчислюється за формулою:

$$\hat{a}_1=[q_{22}(E+A_2^*D_2^*)f_2^*f_2(E+D_2A_2)+q_{21}f_1^*f_1+$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^*f_k^*f_kW_{k2}+q_{11}A_2^*D_2^*D_2A_2+$$

$$+\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^*A_{k+1}^*D_{k+1}^*D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}+$$

$$+q_{12}(E+A_2^*D_2^*)A_3^*D_3^*D_3A_3(E+D_2A_2)]^{-1}\times$$

$$\times[q_{21}f_1^*y(1)+q_{22}(E+A_2^*D_2^*)f_2^*(y(2)-f_2D_2\varphi_2)+$$

$$+\sum_{k=3}^{m} q_{2k}W_{k2}^*f_k^*(y(k)-f_kD_k\varphi_k-f_k\sum_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1})-$$

$$-\sum_{k=3}^{m-1} q_{1k}W_{k2}^*A_{k+1}^*D_{k+1}^*Z_{k+1}-q_{11}A_2^*D_2^*D_2\varphi_2-$$

$$-q_{12}(E+A_2^*D_2^*)A_3^*D_3^*(D_3\varphi_3+D_3A_3D_2\varphi_2)],$$

що і потрібно було показати. $\square$

## 4.4 Мінімаксні оцінки параметрів різницевих рівнянь

В цьому розділі задачу знаходження гарантованої оцінки $\hat{a}$ на основі спостережень $x(k)$, $k = \overline{1,m+1}$ розв'яжемо шляхом реалізації наступної багатокрокової процедури. На $j$-у кроці $(j = \overline{1,m-1})$ відбувається пошук оцінки $\hat{a}_{j+1}$ на основі оцінки $\hat{a}_j$ та спостережень $x(j)$ та $x(j+1)$ з використанням фільтра Каллмана Бюсі.

Для спрощення, припускаємо $a_1 = 0$. Покладемо $\hat{a}_1 = 0$ та позначимо $I(u,\hat{a}_1) = I(u)$.

Знайдемо $\hat{u} \in Arg \min\limits_{u \in U_{(1)} \times \cdots \times U_{(m-1)}} I(u)$ із співвідношення:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + v\tau)|_{\tau=0} = -\sum_{k=1}^{m} q_{2k}(y(k) - f_k\hat{a}_k, f_k\bar{\bar{a}}_k) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k,v_k) = 0, \tag{117}$$

де $\bar{\bar{a}}_{k+1} = \bar{\bar{a}}_k + v_k$, $k = \overline{1,m-1}$, $\bar{\bar{a}}_1 = 0$; $v \in R^{M\times(m-1)}$.

Визначимо оператори $\Delta_+$ та $\Delta_-$ за правилами:

$$\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j, j = \overline{1,m-2},$$

$$\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}, j = \overline{2,m-1},$$

та позначимо:

$$\Delta_-\hat{p}_k = q_{2k} f_k^*(y(k) - f_k\hat{a}_k), k = \overline{1,m-1}, \hat{p}_m = 0.$$

Тоді вираз (117) набуде вигляду:

$$-\sum_{k=1}^{m} q_{2k}(y(k) - f_k\hat{a}_k,f_k\bar{\bar{a}}_k) + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k,v_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} (\Delta_-\hat{p}_k, \bar{\bar{a}}_k) + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k,v_k) =$$

$$= -\left[-\hat{p}_0\bar{\bar{a}}_1 + \hat{p}_m\bar{\bar{a}}_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{p}_k,\Delta_+\bar{\bar{a}}_k)\right] + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k,v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{p}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k, v_k) = 0. \qquad (118)$$

З (118) отримаємо рівності:

$$\hat{u}_k = -(q_{1k})^{-1}\hat{p}_k, k = \overline{1, m-1}.$$

Отже, оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m)$ знаходиться за формулами:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - (q_{1k})^{-1}\hat{p}_k, k = \overline{1, m-1}, \hat{a}_1 = 0.$$

Спряжена система для (118) має вигляд:

$$\begin{cases} \hat{p}_{k-1} = \hat{p}_k - q_{2k} f_k^*(y(k) - f_k \hat{a}_k), k = \overline{m, 1}, \hat{p}_m = 0, \\ \hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - (q_{1k})^{-1}\hat{p}_k, k = \overline{1, n-1}, \hat{a}_1 = 0. \end{cases} \qquad (119)$$

Уведемо функцію

$$I_1(w) = \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}|w_k|^2 + \sum_{k=1}^{m} (q_{1k})^{-1}|z_k|^2, \qquad (120)$$

(тут $z_{k-1} = z_k + f_k^* w_k$, $k = \overline{m, 1}$, $z_m = \alpha$, $\alpha \in R^M$; $w = (w_1, \ldots, w_m)$, $w_k \in R^N$, $k = \overline{1, m}$).

Для того щоб знайти $\hat{w} \in Arg \min\limits_{w \in R^N \times \cdots \times R^N} I_1(w)$, де $\hat{w} = (\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_m)$, обчислимо похідну та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} I_1(\hat{w} + \tau v)|_{\tau=0} = \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} (q_{1k})^{-1}(\hat{z}_k, \tilde{z}_k) = 0, \qquad (121)$$

де $\tilde{z}_{k-1} = \tilde{z}_k + f_k^* v_k$, $k = \overline{m, 2}$, $\tilde{z}_m = 0$; $v = (v_1, \ldots, v_m)$, $v_k \in R^N$, $k = \overline{1, m}$.

Позначимо

$$\Delta_+ \tilde{p}_k = (q_{1k})^{-1}\hat{z}_k, k = \overline{1, N}, \tilde{p}_1 = 0.$$

Отже, (121) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{m} (q_{1k})^{-1}(\hat{z}_k, \tilde{z}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{m} (\Delta_+ \tilde{p}_k, \tilde{z}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \left[ -\tilde{p}_1 \tilde{z}_1 + \tilde{p}_{m+1} \tilde{z}_m - \sum_{k=2}^{m} (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) - \sum_{k=2}^{m} (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) - \tilde{p}_1(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) - \sum_{k=1}^{m} (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{m} (\tilde{p}_k, f_k^* v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{m} (f_k \tilde{p}_k, v_k) = 0.$$

З останньої рівності отримуємо:

$$\hat{w}_k = -q_{2k} f_k \tilde{p}_k, k = \overline{1,m}. \tag{122}$$

Мінімізуючи функції (120), одержимо систему вигляду:

$$\begin{cases} \hat{z}_{k-1} = \hat{z}_k + f_k^* w_k, k = \overline{m,1}, \hat{z}_m = \alpha, \\ \tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + (q_{1k})^{-1} \hat{z}_k, k = \overline{1,m}, \tilde{p}_1 = 0. \end{cases} \tag{123}$$

**Теорема 40.** *Оптимальна за функцією* $\Phi(a)$ *оцінка* $\hat{a}$ *знаходиться за формулами:*

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + F_k(y(k) - f_k \hat{a}_k), \hat{a}_1 = 0, k = \overline{1,m-1}, \tag{124}$$

*де*

$$F_k = P_k f_k^* (f_k p_k f_k^* + (q_{2k})^{-1} E)^{-1}, k = \overline{1,m-1},$$

$$P_{k+1} = (E - F_k f_k) P_k (E - F_k f_k)^* + (q_{1k})^{-1} E +$$

$$+ (q_{2k})^{-1} F_k F_k^*, P_1 = 0, k = \overline{1,m-2}.$$

*Доведення.* Згідно з теоремою двоїстості [7], задача знаходження оцінки $\hat{a}$ для системи (119) є еквівалентною задачі знаходження $w_k$, $k = \overline{1{,}m}$ для системи (123), за умови, що має місце рівність:

$$(\alpha,\hat{a}_m) = -\sum_{k=1}^{m} (\hat{w}_k, y(k)). \tag{125}$$

Оскільки $\hat{z}_m = \alpha$, то виконується умова:

$$(\alpha,\hat{a}_m) = (\hat{z}_m,\hat{a}_m). \tag{126}$$

З рівності

$$\sum_{k=1}^{m} (\Delta_-\hat{z}_k, \hat{a}_k) = -(\hat{z}_0, \hat{a}_1) - \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{z}_k, \Delta_+\hat{a}_k) + (\hat{z}_m,\hat{a}_m),$$

отримуємо представлення:

$$(\hat{z}_m,\hat{a}_m) = \sum_{k=1}^{m} (\Delta_-\hat{z}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{z}_k, \Delta_+\hat{a}_k). \tag{127}$$

Підставивши (127) в (126), одержимо:

$$(\alpha,\hat{a}_m) = \sum_{k=1}^{m} \Delta_-\hat{z}_k, \hat{a}_k + \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{z}_k, \Delta_+\hat{a}_k).$$

Із (119) та (123) випливають рівності:

$$(\alpha,\hat{a}_m) = \sum_{k=1}^{m} (q_{2k} f_k^* f_k \tilde{p}_k,\hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{z}_k,(q_{1k})^{-1}\hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k} f_k^* f_k \tilde{p}_k,\hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{m-1} ((q_{1k})^{-1}\hat{z}_k,\hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k} f_k^* f_k \tilde{p}_k,\hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{m-1} (\Delta_+\tilde{p}_k, \hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (q_{2k} f_k^* f_k \tilde{p}_k,\hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{m-1} (\Delta_+\tilde{p}_k, \hat{p}_k) -$$

$$-(\tilde{p}_{m+1}-\tilde{p}_m)\hat{p}_m=\sum_{k=1}^{m}(q_{2k}f_k^*f_k\tilde{p}_k,\hat{a}_k)-$$

$$-\left[-(\tilde{p}_1,\hat{p}_1)-\sum_{k=2}^{m-1}(\tilde{p}_k,\Delta_-\hat{p}_k)+(\tilde{p}_{m+1},\hat{p}_m)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(q_{2k}f_k^*f_k\tilde{p}_k,\hat{a}_k)+\sum_{k=2}^{m-1}(\tilde{p}_k,\Delta_-\hat{p}_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(q_{2k}\tilde{p}_k,f_k^*f_k\hat{a}_k)+\sum_{k=1}^{m-1}(\tilde{p}_k,\Delta_-\hat{p}_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\tilde{p}_k,\Delta_-\hat{p}_k+q_{2k}f_k^*f_k\hat{a}_k). \tag{128}$$

З (119) отримуємо формули:

$$q_{2k}f_k^*y(k)=\Delta_-\hat{p}_k+q_{2k}f_k^*f_k\hat{a}_k,\, k=\overline{1,m}. \tag{129}$$

Тоді, з врахуванням (129), для (128) справедливі перетворення:

$$(\alpha,\hat{a}_m)=\sum_{k=1}^{m}(\tilde{p}_k,\Delta_-\hat{p}_k+q_{2k}f_k^*f_k\hat{a}_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\tilde{p}_k,q_{2k}f_k^*y(k))=\sum_{k=1}^{m}(q_{2k}f_k\tilde{p}_k,y(k)). \tag{130}$$

Використовуючи (122), із (130) отримаємо рівність:

$$(\alpha,\hat{a}_m)=-\sum_{k=1}^{m}(\hat{w}_k,y(k))$$

Згідно з [7], оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ знаходиться наступним чином:

$$\hat{a}_{k+1}=\hat{a}_k+F_k(y(k)-f_k\hat{a}_k),\hat{a}_1=0,k=\overline{1,m-1},$$

що і потрібно було показати. □

# Розділ 5 Оцінки впливів в моделях поширення інформації із нестаціонарними параметрами

Розглядається деяка соціальна група чисельністю $L$ осіб, на яку провадиться інформаційна дія протягом часового проміжку $(0,T)$ з одного з двох інформаційних джерел, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію $i$-го типу $(i = 1,2)$ залежить як від зовнішнього впливу, так і від спілкування суб'єктів між собою. Позначимо через $x_i(t) \in R^1$, $t \in (0,T)$, $i = 1,2$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію $i$-го типу в момент , $t \in (0,T)$, через $a_i(t)$, $t \in (0,T)$ — інтенсивність спілкування, $u_i(t)$, $t \in (0,T)$ — зовнішні впливи, $c_i(t)$, $t \in (0,T)$ — інтенсивність зовнішнього $i$-го впливу. Тоді зміну з часом величин $x_i(t)$, $t \in (0,T)$, $i = 1,2$ можливо описати системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t)x_i(t)\left(L - x_1(t) - x_2(t)\right) +$$
$$+ c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1,2. \tag{131}$$

## 5.1 Припущення та позначення

Розглянемо випадок, коли для системи (131) відомі функції $a_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1,2$, $u_2(t)$, $t \in (0,T)$, які є неперервними на $(0,T)$; $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ — невідома функція зовнішнього впливу, що задовольняє умову $u_1(t) \geq 0$ на часовому проміжку $(0,T)$.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m, t_k \in (0,T)$, $k = \overline{1,m}$ спостерігаються функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$, $t \in (0,T)$ при певній $u_1(t)$, $t \in (0,T)$:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1,m}, i = 1,2,$$

де $\eta_{ik}$, $k = \overline{1,m}$, $i = 1,2$ — похибки вимірювань.

Уведемо позначення $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{im})^*$, $x_i = (x_i(t_1), \ldots, x_i(t_m))^*$, $\eta_i = (\eta_{i1}, \ldots, \eta_{im})^*$, $i = 1,2$.

Відомо, що $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ та $\eta_{ik}$, $k = \overline{1,m}$, $i = 1,2$ належать множині:

$$G = \left\{(\eta_1,\eta_2, u_1) : F_1(\eta_1) + F_2(\eta_2) + F_3(u_1(\cdot)) \le \gamma^2(T), u_1(t) \ge 0\right\},$$

де

$$F_i(\eta_i) = \sum_{k=1}^{m} q_{1ik}^2 \eta_{ik}^2, i = 1,2,$$

$$F_3(u_1(\cdot)) = \int_0^T q_2^2(t) u_1(t) dt,$$

і $q_{1ik}^2$, $i = 1,2$, $\gamma^2(T)$, — відомі скалярні величини, а $q_2^2(t)$, $t \in (0,T)$ — відома функція.

Апостеріорна множина $G_y$ має вигляд:

$$G_y = \{u_1 : F_1(y_1 - x_1(\cdot)) + F_2(y_2 - x_2) +$$
$$+ F_3(u_1(\cdot)) \le \gamma^2(T), u_1(t) \ge 0\right\},$$

де

$$F_i(y_i - x_i) = \sum_{k=1}^{m} q_{1ik}^2 (y_{ik} - x_i(t_k))^2, i = 1,2,$$

**Означення 9.** Функцію $u_1(t) \in G_y$, $t \in (0,T)$ назвемо *апостеріорною оцінкою* функції $u_1(t)$, $t \in (0,T)$.

**Означення 10.** Функцію $\tilde{u}_1(t) \in G_y$, $t \in (0,T)$, що знаходиться з умови:

$$\inf_{u_1 \in G_y} \sup_{v_1 \in G_y} \|u_1 - v_1\| = \sup_{v_1 \in G_y} \|\tilde{u}_1 - v_1\| = \sigma,$$

де

$$\|v\| = \left\{ \int_0^T (v(\tau))^2 \, d\tau \right\}^{\frac{1}{2}},$$

назвемо *гарантованою оцінкою* функції $u_1(t)$, $t \in (0,T)$, а величину $\sigma$ - *гарантованою похибкою* оцінки $\tilde{u}_1(t)$, $t \in (0,T)$.

Позначимо

$$I(u_1(\cdot)) = F_1(y_1 - x_1) + F_2(y_2 - x_2) + F_3(u_1(\cdot)).$$

**Означення 11.** Апостеріорну оцінку $\hat{u}_1(t) \in G_y$, $t \in (0,T)$ назвемо *оптимальною оцінкою* за функціоналом $I(u_1(\cdot))$, якщо вона задовольняє умову:

$$\inf_{u_1 \in G_y} I(u_1(\cdot)) = I(\hat{u}_1(\cdot)).$$

## 5.2 Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників одного інформаційного потоку та відомими параметрами системи

Припустимо, що для системи (131) параметри $a_1(t)$, $c_1(t)$ — відомі, неперервні на $(0,T)$ функції; $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ — невідома функція зовнішнього впливу; а $x_2(t)$, $t \in (0,T)$ відома функція.

Дослідимо проблему знаходження оптимальної за деяким функціоналом апостеріорної оцінки функції $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ при відомій функції $x_2(t)$, $t \in (0,T)$ та спостереженнях за $x_1(t,u_1(\cdot))$, в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m, t_k \in (0,T)$, $k = \overline{1,m}$:

$$y_{1k} = x_1(t_k,u_1(\cdot)) + \eta_{1k}, k = \overline{1,m},$$

де $\eta_{1k} \in R^1$ — похибки спостережень.

Тоді $x_1(t,u_1(\cdot))$ задовольняє рівняння з початкою умовою:

$$\dot{x}_1(t,u_1(\cdot)) = \tilde{a}_1(t)x_1(t,u_1(\cdot)) - a_1(t)x_1^2(t,u_1(\cdot)) +$$
$$+ c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0,T), \tag{132}$$

де

$$\tilde{a}_1(t) = a_1(t)(L - x_2(t)), t \in (0,T).$$

Апостеріорна множина у цьому випадку:

$$G_{y_1} = \left\{u_1(\cdot) : I_{y_1}(u_1(\cdot)) \leq \gamma_{y_1}^2(T)\right\},$$

де

$$I_{y_1}(u_1(\cdot)) = F_1(y_1 - x_1) + F_3(u_1(\cdot)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2(y_{1k} - x_1(t_k,u_1(\cdot)))^2 + \int_0^T q_{21}^2(t)u_1^2(t)dt \tag{133}$$

і $q_{11k}^2$, $\gamma_{y_1}^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_{21}^2(t)$, $t \in (0,T)$ — відома функція.

Тоді $x_1(t,u_1(\cdot))$, $t \in (0,T)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\dot{x}_1(t,u_1(\cdot)) = a_1(t)x_1(t,u_1(\cdot))(L_1(t) - x_1(t,u_1(\cdot)) +$$
$$+ c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0,T), \tag{134}$$

де

$$L_1(t) = L - x_2(t), t \in (0,T).$$

**Теорема 41.** *На множині* $G_{y_1}$ *існує оптимальна за функціоналом* $I_{y_1}(u_1(\cdot))$ *функція* $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0,T)$, *яка є розв'язком варіаційної нерівності:*

$$I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot))(v(\cdot) - \hat{u}_1(\cdot)) \geq 0, \text{ майже скрізь для } \forall v(\cdot) \in L_2^+(0,T),$$

*де*

$$I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)) = \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2(y_{1k} - x_1(t_k,\hat{u}_1(\cdot)))\times$$

$$\times\chi_{(0,t_k)}(t)c_1(t)\beta(t,t_k) + q_{21}^2(t)\hat{u}_1(t),$$

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in (0,t), \\ 0, & \tau \notin (0,t), \end{cases} \quad x_0(t) = x_1(t,\hat{u}_1(\cdot)), t \in (0,T),$$

$$\beta(\tau,t) = exp\left\{\int_0^T \chi_{(\tau,t)}(s)a_1(s)(L_1(s) - 2x_0(s))ds\right\}, \tau, t \in (0,T).$$

*Доведення.* Відомо, що при $u_1(t) \geq 0$, $t \in (0,T)$ рівняння Ріккаті (134) має єдиний узагальнений розв'язок на інтервалі $(0,T)$, причому функціонали $F_i(y_1 - x_1)$, $i = 1,2$ — слабонеперервні в $L_2^+[0,T]$. Функціонал $F_3(u_1(\cdot))$ є слабонеперервний знизу. Тоді функціонал $I_{y_1}(u_1(\cdot))$ — слабонеперервний знизу і для нього справедливий вираз:

$$\lim_{\|u_1\|\to\infty} I_{y_1}(u_1(\cdot)) = \infty,$$

а значить існує функція $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0,T)$ ([5]) така, що справедлива рівність:

$$\inf_{u_1 \in L_2^+[0,T]} I_{y_1}(u_1(\cdot)) = I_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)),$$

причому

$$I_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot) + \tau(v(\cdot) - \hat{u}_1(\cdot))) \geq I_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)), \forall\tau \in [0,1]\,, \forall v \in L_2^+(0,T).$$

Оскільки функціонал $I_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot) + \tau v(\cdot))$ – диференційований по $\tau$, то виконується варіаційна нерівність:

$$\left(I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)),(v(\cdot) - \hat{u}_1(\cdot))\right) \geq 0,$$

де $I'_{y_1}(\hat{u}_1(t))$ - похідна Гато функціонала $I_{y_1}(u_1(\cdot))$ в точці $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0,T)$.

Тоді

$$\left(I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)),(v(\cdot)-\hat{u}_1(\cdot))\right) = 2\int_0^T \psi(t)(v(t)-\hat{u}_1(t))dt,$$

де $\psi(t)$, $t \in (0,T)$ – деяка функція із $L_2[0,T]$.

Знайдемо $\psi(t)$, $t \in (0,T)$, увівши до розгляду вираз:

$$\frac{1}{2}\left(I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)),v(\cdot)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)+\tau v(\cdot))\bigg|_{\tau=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2(y_{1k}-x_1(t_k,\hat{u}_1(\cdot)))\tilde{x}_1(t_k) + \int_0^T q_{21}^2(t)\hat{u}_1(t)v(t)dt, \quad (135)$$

де $\tilde{x}_1(t)$, $t \in (0,T)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = a_1(t)\tilde{x}_1(t)(L_1(t)-x_0(t))-$$

$$-a_1(t)x_0(t)\tilde{x}_1(t)+c_1(t)v(t), \tilde{x}_1(0)=0, t\in(0,T). \quad (136)$$

Відмітимо, що (136) є лінійним диференціальним рівнянням вигляду:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = a_1(t)\left(L_1(t)-2x_0(t)\right)\tilde{x}_1(t)+c_1(t)v(t), t\in(0,T),$$

з початковою умовою

$$\tilde{x}_1(0)=0.$$

За формулою Коші рівняння (136) матиме розв'язок:

$$\tilde{x}_1(t) = \int_0^t c_1(\tau)v(\tau)exp\left\{\int_\tau^t a_1(s)(L_1(s)-2x_0(s))ds\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^T \chi_{(0,t)}(\tau)c_1(\tau)v(\tau)\times$$

$$\times exp\left\{\int_0^T \chi_{(\tau,t)}(s)a_1(s)(L_1(s)-2x_0(s))ds\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^T \chi_{(0,t)}(\tau)c_1(\tau)v(\tau)\beta(\tau,t)d\tau, t\in(0,T). \quad (137)$$

З урахуванням (137) вираз (135) прийме вигляд:

$$\frac{1}{2}\left(I'_{y_1}(\hat{u}_1(\tau)),v(\tau)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - x_0(t_k)) \int_0^T \chi_{(0,t_k)}(\tau) c_1(\tau) v(\tau) \beta(\tau,t_k) d\tau +$$

$$+ \int_0^T q_{21}^2(\tau) \hat{u}_1(\tau) v(\tau) d\tau = \int_0^T q_{21}^2(\tau) \hat{u}_1(\tau) v(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^T \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - x_0(t_k)) \chi_{(0,t_k)}(\tau) c_1(\tau) \beta(\tau,t_k) v(\tau) d\tau.$$

$$= \int_0^T (\sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - x_0(t_k)) \chi_{(0,t_k)}(\tau) c_1(\tau) \beta(\tau,t_k) +$$

$$+ q_{21}^2(\tau) \hat{u}_1(\tau)) v(\tau) d\tau.$$

Отже, справедлива рівність:

$$\frac{1}{2} \left( I'_{y_1}(\hat{u}_1(\tau)), (v(\tau) - \hat{u}_1(\tau)) \right) =$$

$$= \int_0^T (\sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - x_0(t_k)) \chi_{(0,t_k)}(\tau) c_1(\tau) \beta(\tau,t_k) +$$

$$+ q_{21}^2(\tau) \hat{u}_1(\tau)) (v(\tau) - \hat{u}_1(\tau)) d\tau,$$

з якої отримаємо шукану функцію $\psi(t)$, $t \in (0,T)$:

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - x_1(t_k, \hat{u}_1(\cdot))) \chi_{(0,t_k)}(t) c_1(t) \beta(t,t_k) +$$

$$+ q_{21}^2(t) \hat{u}_1(t), t \in (0,T).$$

□

*Зауваження* 6. Нехай $\hat{u}_1(\cdot) \in Arg \min\limits_{u_1 \in L_2[0,T]} I(u_1(\cdot))$, і припустимо, що $\hat{u}_1(t) > 0$, $t \in (0,T)$. Тоді виконується рівність:

$$\int_0^T \left( \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - x_1(t_k, \hat{u}_1(\cdot))) \chi_{(0,t_k)}(t) c_1(t) \beta(t,t_k) \right) dt +$$

$$+ \int_0^T q_{21}^2(t) \hat{u}_1(t) dt = 0.$$

*Зауваження 7.* Для апостеріорної оцінки $\hat{u}_1(\cdot) \in G_{y_1}$ функції $u_1(t)$, $t \in (0,T)$, яка є оптимальною за функціоналом $I_{y_1}(u_1(\cdot))$, гарантована похибка обчислюється за формулою:

$$\sigma = \left\{ \sup_{v \in G_y} \int_0^T (\hat{u}_1(t) - v(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

## 5.3 Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи для одного рівняння

У цьому розділі розглянемо випадок, коли

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t)x_i(t)\left(L - x_1(t) - x_2(t)\right) +$$
$$+ c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1{,}2, t \in (0,T), \qquad (138)$$

де $a_1(t)$, $c_1(t)$ — відомі, неперервні на $(0,T)$ функції; $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ — невідома функція зовнішнього впливу; $a_2(t)$, $c_2(t)$, $u_2(t)$ — невідомі, неперервні на $(0,T)$ функції.

Припускається, що:

$$\dot{x}_2(t) = \varphi(t), t \in (0,T),$$

де $\varphi(t)$ — невідома неперервна на $(0,T)$ функція.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $t_k \in (0,T)$, $k = \overline{1,m}$ спостерігаються величини:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1,m}, i = 1{,}2,$$

де $\eta_{ik} \in R^1$, $k = \overline{1,m}$, $i = 1{,}2$ — похибки спостережень.

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_{x_2} = \left\{\varphi(\cdot) : I_{y_2}(\varphi(\cdot)) \le \gamma_{y_2}^2(T)\right\},$$

де

$$I_{y_2}(\varphi(\cdot)) = \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - x_2(t_k))^2 + \int_0^T q_{22}^2(t)\varphi^2(t)dt$$

і $q_{12k}^2$, $k = \overline{1,m}$, $\gamma_{y_2}^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_{22}^2(t)$, $t \in (0,T)$ — відома функція.

**Теорема 42.** *Функція $\hat{\varphi} \in G_{x_2}$, що знаходиться за формулою:*

$$\hat{\varphi}(t) = q_{22}^{-2}(t) \sum_{k=1}^{m} q_{12k}(y_{2k} - \hat{x}_2(t_k))\chi_{(0,t_k)}(t), t \in (0,T),$$

*є оптимальною оцінкою $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$, тобто $\hat{\varphi} \in Arg \min\limits_{\varphi \in G_{x_2}} I_{y_2}(\varphi(\cdot))$, де величини $\hat{x}_2(t_j)$, $j = \overline{1,m}$, $t_j \in (0,T)$ знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь:*

$$\hat{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 \hat{x}_2(t_k) h_{kj} = x_2^0 + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2(t_j) y_{2k} h_{kj}, k = \overline{1,m},$$

$$h_{kj} = \int_0^T q_{22}^{-2}(t)\chi_{(0,t_k)}(t)\chi_{(0,t_j)}(t)dt, k,j = \overline{1,m}.$$

*Доведення.* Знайдемо похідну $\frac{1}{2}\frac{d}{dw} I_{y_2}\ (\hat{\varphi}(\cdot) + wv(\cdot))|_{w=0}$, $\forall v(t) \in L_2(0,T)$ і прирівняємо її до 0:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dw} I_{y_2}\ (\hat{\varphi}(\cdot) + wv(\cdot))|_{w=0} = \int_0^T q_{22}^2(t)\hat{\varphi}(t)v(t)dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - \hat{x}_2(t_k))\tilde{x}_2(t_k) = 0 \qquad (139)$$

де $\tilde{x}_2(t_k)$, $k = \overline{1,m}$ визначається наступним чином:

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = v(t), t \in (0,T), \tilde{x}_2(0) = 0. \qquad (140)$$

Розв'язок задачі Коші (140) має вигляд:

$$\tilde{x}_2(t_k) = \int_0^{t_k} v(\tau)d\tau = \int_0^T \chi_{(0,t_k)}(\tau)v(\tau)d\tau, k = \overline{1,m}.$$

Таким чином (139) набуде вигляду:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dw} I_{y_2}\ (\hat{\varphi}(\cdot) + wv(\cdot))|_{w=0} = \int_0^T q_{22}^2(t)\hat{\varphi}(t)v(t)dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - \hat{x}_2(t_k)) \int_0^T \chi_{(0,t_k)}(\tau)v(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^T q_{22}^2(t)\hat{\varphi}(t)v(t)dt -$$

$$- \int_0^T \sum_{k=1}^m q_{12k}^2(y_{2k} - \hat{x}_2(t_k))\chi_{(0,t_k)}(\tau)v(\tau)d\tau = 0.$$

Звідси отримуємо рівняння:

$$\hat{\varphi}(t) - q_{22}^{-2}(t)\sum_{k=1}^m q_{12k}(y_{2k} - \hat{x}_2(t_k))\chi_{(0,t_k)}(t) = 0, t \in (0,T). \tag{141}$$

Оскільки для $x_2(t_k)$, $k = \overline{1,m}$ справедливо:

$$x_2(t_k) = x_2^0 + \int_0^{t_k} \varphi(t)dt = x_2^0 + \int_0^T \chi_{(0,t_k)}(t)\varphi(t)dt, k = \overline{1,m}, \tag{142}$$

то, помноживши рівність (141) на $\chi_{(0,t_j)}(t)$, $t \in (0,T)$, $j = \overline{1,m}$ та проінтегрувавши її, отримаємо:

$$\int_0^T \chi_{(0,t_j)}(t)\hat{\varphi}(t)dt =$$

$$= \int_0^T \chi_{(0,t_j)}(t)q_{22}^{-2}(t)\sum_{k=1}^m q_{12k}^2(y_{2k} - \hat{x}_2(t_k))\chi_{(0,t_k)}(t)dt.$$

Останній вираз можна представити у вигляді:

$$\int_0^T \chi_{(0,t_j)}(t)\hat{\varphi}(t)dt + x_2^0 =$$

$$= x_2^0 + \int_0^T \chi_{(0,t_j)}(t)q_{22}^{-2}(t)\sum_{k=1}^m q_{12k}^2 y_{2k}\chi_{(0,t_k)}(t)dt -$$

$$- \int_0^T \chi_{(0,t_j)}(t)q_{22}^{-2}(t)\sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \hat{x}_2(t_k)\chi_{(0,t_k)}(t)dt =$$

$$= x_2^0 + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 y_{2k}\int_0^T q_{22}^{-2}(t)\chi_{(0,t_j)}(t)\chi_{(0,t_k)}(t)dt -$$

$$- \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \hat{x}_2(t_k)\int_0^T \chi_{(0,t_j)}(t)q_{22}^{-2}(t)\chi_{(0,t_k)}(t)dt, j = \overline{1,m}. \tag{143}$$

Тоді, в силу (142), із (143) випливає:

$$\hat{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 \hat{x}_2(t_k) h_{kj} = x_2^0 + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 y_{2k} h_{kj}, j = \overline{1,m},$$

що і треба було довести. □

*Зауваження* 8. Диференціальне рівняння для $x_1(t)$, $t \in (0,T)$ у формулі (138) можна представити у вигляді:

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_1(t)\left(L - x_1(t) - \hat{x}_2(t)\right) -$$

$$- a_1(t)x_1(t)(x_2(t) - \hat{x}_2(t)) + c_1(t)u_1(t), t \in (0,T), \qquad (144)$$

де $\hat{x}_2(t)$, $t \in (0,T)$ знаходиться з Теореми 40.

Уважатимемо, що виконується нерівність:

$$\|x_2 - \hat{x}_2\| \leq \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ — достатньо мала величина.

Тоді в рівнянні (144) можна знехтувати другим доданком і задачу пошуку оцінки $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ для системи (138) зводимо до попереднього випадку оцінки впливів при спостереженнях за кількістю прихильників одного інформаційного потоку.

## 5.4 Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи

Розглянемо окремий випадок (131) , коли

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t)x_i(t)\left(L - x_1(t) - x_2(t)\right) +$$

$$+ c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1{,}2, t \in (0,T), \qquad (145)$$

де $a_i(t)$, $c_i(t)$, $u_2(t)$, $t \in (0,T)$ — відомі, неперервні на $(0,T)$ функції; $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ — невідома функція зовнішнього впливу, причому $u_1(t) > 0$, $t \in (0,T)$.

Припускається, що в точках $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $t_k \in (0,T)$, $k = \overline{1,m}$ спостерігаються величини:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1,m}, i = 1{,}2,$$

де $\eta_{ik} \in R^1$, $k = \overline{1,m}$, $i = 1{,}2$ — похибки вимірювань.

Лінеаризуємо систему (145) в околі $\bar{\bar{x}}_1(t)$, $\bar{\bar{x}}_2(t)$, $t \in (0{,}T)$, які є наближеними розв'язками $x_1(t)$ та $x_2(t)$, $t \in (0{,}T)$, відповідно:

$$\dot{x}_1(t) \approx a_1(t)\bar{\bar{x}}_1(t)\left(L - \bar{\bar{x}}_1(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)\right) + c_1(t)u_1(t) +$$

$$+\left[a_1(t)\left(L - \bar{\bar{x}}_1(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)\right) - a_1(t)\bar{\bar{x}}_1(t)\right] \times$$

$$\times (x_1(t) - \bar{\bar{x}}_1(t)) - a_1(t)\bar{\bar{x}}_1(t)(x_2(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)), t \in (0{,}T),$$

$$\dot{x}_2(t) \approx a_2(t)\bar{\bar{x}}_1(t)\left(L - \bar{\bar{x}}_1(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)\right) + c_2(t)u_2(t) -$$

$$-a_2(t)\bar{\bar{x}}_2(t)(x_1(t) - \bar{\bar{x}}_1(t)) +$$

$$+\left[a_2(t)\left(L - \bar{\bar{x}}_1(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)\right) - a_2(t)\bar{\bar{x}}_2(t)\right](x_2(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)), t \in (0{,}T).$$

Звідси отримаємо систему:

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1(t) + \\ +c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \\ +b_2(t), x_2(0) = x_2^0, \end{array}\right. \quad t \in (0{,}T), \tag{146}$$

де

$$a_{11}(t) = a_1(t)\left(L - 2\bar{\bar{x}}_1(t) - \bar{\bar{x}}_2(t)\right), a_{12} = -a_1(t)\bar{\bar{x}}_1(t), t \in (0{,}T),$$

$$a_{21}(t) = -a_2(t)\bar{\bar{x}}_2(t), a_{22} = a_2(t)\left(L - \bar{\bar{x}}_1(t) - 2\bar{\bar{x}}_2(t)\right), t \in (0{,}T),$$

$$b_1(t) = a_1(t)\bar{\bar{x}}_1(t)(\bar{\bar{x}}_1(t) + \bar{\bar{x}}_2(t)), t \in (0{,}T),$$

$$b_2(t) = a_2(t)\bar{\bar{x}}_2(t)(\bar{\bar{x}}_1(t) + \bar{\bar{x}}_2(t)) + c_2(t)u_2(t), t \in (0{,}T).$$

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_{y_1y_2} = \left\{u_1(\cdot) : I_{y_1y_2}(u_1(\cdot)) \le \gamma_{y_1y_2}^2(T)\right\},$$

де

$$I_{y_1y_2}(u_1(\cdot)) = \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2\left(y_{1k} - x_1(t_k)\right)^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2\left(y_{2k} - x_2(t_k)\right)^2 + \int_0^T q_2^2(t)u_1^2(t)dt,$$

і $q_{11k}^2$, $q_{12k}^2$, $k = \overline{1,m}$, $\gamma_{y_1y_2}^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_2^2(t)$, $t \in (0{,}T)$ — відома функція.

**Теорема 43.** *Оптимальна оцінка* $\hat{u}_1(\cdot) \in Arg \min\limits_{u_1 \in G_{y_1 y_2}} I_{y_1 y_2}(u_1(\cdot))$ *впливів* $u_1(t)$, $t \in (0,T)$ *системи (146) знаходиться за формулою:*

$$\hat{u}_1(t) = q_2^{-2}(t) \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - \bar{x}_1(t_k) - d_{1k}) \tilde{g}_{1k}(t) +$$

$$+ q_2^{-2}(t) \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - \bar{x}_2(t_k) - d_{2k}) \tilde{g}_{2k}(t), t \in (0,T).$$

*Тут*

$$\begin{pmatrix} d_{1k} \\ d_{2k} \end{pmatrix} = \int_0^T \chi_{(0,t_k)}(\tau) \Phi(t_k,\tau) \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau +$$

$$+ \Phi(t_k,0) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, k = \overline{1,m},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{1k}(t) \\ \tilde{g}_{2k}(t) \end{pmatrix} = \chi_{(0,t_k)}(t) \Phi(t_k,t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, k = \overline{1,m}, t \in (0,T),$$

*а* $\Phi(t_k,\tau)$, $k = \overline{1,m}$ *— фундаментальна матриця системи (146), нормована в точці* $\tau$*; величини* $\bar{x}_i(t_j)$, $j = \overline{1,m}$, $i = 1,2$ *знаходяться з системи алгебраїчних лінійних рівнянь:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{x}_1(t_j) + \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(1)} + \\ + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(2)} = \\ = \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(1)} - \\ - \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(2)}, \\ \bar{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(3)} + \\ + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(4)} = \\ = \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(3)} - \\ - \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(4)}, \end{array} \right. \quad j = \overline{1,m}.$$

*де*

$$r_{kj}^{(1)} = \int_0^T q_2^{-2}(t) \tilde{g}_{1j}(t) \tilde{g}_{1k}(t) dt, r_{kj}^{(2)} =$$

$$= \int_0^T q_2^{-2}(t) \tilde{g}_{1j}(t) \tilde{g}_{2k}(t) dt, k,j = \overline{1,m},$$

$$r_{kj}^{(3)} = \int_0^T q_2^{-2}(t)\tilde{g}_{2j}(t)\tilde{g}_{1k}(t)dt, r_{kj}^{(4)} =$$

$$= \int_0^T q_2^{-2}(t)\tilde{g}_{2j}(t)\tilde{g}_{2k}(t)dt,\ k,j = \overline{1,m}.$$

*Доведення.* Знайдемо

$$\hat{u}_1 \in Arg \min_{u_1 \in G_{y_1 y_2}} I_{y_1 y_2}(u_1(\cdot))$$

з умови $\frac{1}{2}\frac{d}{dw} I_{y_1 y_2}\ (\hat{u}(\cdot) + wv(\cdot))|_{w=0} = 0$, $\forall v(\cdot) \in L_2(0,T)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dw} I_{y_1 y_2}\ (\hat{u}_1(\cdot) + wv(\cdot))|_{w=0} = \int_0^T q_2^2(t)\hat{u}_1(t)v(t)dt -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2(y_{1k} - x_1(t_k))\tilde{x}_1(t_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2(y_{2k} - x_2(t_k))\tilde{x}_2(t_k) = 0,$$

де $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$, $t \in (0,T)$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}_1(t) = a_{11}\tilde{x}_1(t) + a_{12}\tilde{x}_2(t) + \\ \quad + c_1(t)v(t), \tilde{x}_1(0) = 0, \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = a_{21}\tilde{x}_1(t) + a_{22}\tilde{x}_2(t), \tilde{x}_2(0) = 0, \end{array} \right. \quad t \in (0,T). \tag{147}$$

Розв'язок системи (147) за формулою Коші має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t_k) \\ \tilde{x}_2(t_k) \end{pmatrix} = \int_0^{t_k} \Phi(t_k,\tau) \begin{pmatrix} c_1(\tau)v(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^T \chi_{(0,t_k)}(\tau)\Phi(t_k,\tau) \begin{pmatrix} c_1(\tau)v(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau,\ k = \overline{1,m}.$$

Таким чином отримуємо представлення:

$$\tilde{x}_i(t_k) = \int_0^T \tilde{g}_{ik}(\tau)v(\tau)d\tau,\ t_k \in (0,T), k = \overline{1,m}, i = 1,2. \tag{148}$$

Отже, в силу (148), для рівності $\frac{1}{2}\frac{d}{dw}I_{y_1y_2}\left.(\hat{u}_1+wv)\right|_{w=0}=0$ справедливі перетворення:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dw}I_{y_1y_2}\left.(\hat{u}_1+wv)\right|_{w=0}=\int_0^T q_2^2(t)\hat{u}_1(t)v(t)dt-$$

$$-\sum_{k=1}^m q_{11k}^2(y_{1k}-x_1(t_k))\int_0^T \tilde{g}_{1k}(\tau)v(\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{k=1}^m q_{12k}^2(y_{2k}-x_2(t_k))\int_0^T \tilde{g}_{2k}(\tau)v(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^T q_2^2(t)\hat{u}_1(t)v(t)dt-$$

$$-\int_0^T\sum_{k=1}^m q_{11k}^2(y_{1k}-x_1(t_k))\tilde{g}_{1k}(\tau)v(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^T\sum_{k=1}^m q_{12k}^2(y_{2k}-x_2(t_k))\tilde{g}_{2k}(\tau)v(\tau)d\tau=0.$$

З останньої рівності одержимо:

$$\hat{u}_1(t)-q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^m q_{11k}^2(y_{1k}-x_1(t_k))\tilde{g}_{1k}(t)-$$

$$-q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^m q_{12k}^2(y_{2k}-x_2(t_k))\tilde{g}_{2k}(t)=0, t\in(0,T). \tag{149}$$

Розв'язок системи (146) за формулою Коші має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1(t_k)\\ x_2(t_k)\end{pmatrix}=\Phi(t_k,0)\begin{pmatrix} x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^{t_k}\Phi(t_k,\tau)\begin{pmatrix} b_1(\tau)+c_1(\tau)u_1(\tau)\\ b_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau=\Phi(t_k,0)\begin{pmatrix} x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^T\chi_{(0,t_k)}\Phi(t_k,\tau)\begin{pmatrix} c_1(\tau)\\ 0\end{pmatrix}u_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^T\chi_{(0,t_k)}\Phi(t_k,\tau)\begin{pmatrix} b_1(\tau)\\ b_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau, k=\overline{1,m}.$$

У кінцевому підсумку отримуємо представлення для $x_i(t_k)$, $k=\overline{1,m}$, $i=1{,}2$:

$$x_i(t_k)=\int_0^T \tilde{g}_{ik}(\tau)u_1(\tau)d\tau+d_{ik}, t_k\in(0{,}T), k=\overline{1,m}, i=1{,}2. \quad (150)$$

Уведемо позначення $\bar{x}_i(t_k)=\int_0^T \tilde{g}_{ik}(\tau)u_1(\tau)d\tau$, $k=\overline{1,m}$, $i=1{,}2$, тоді (149) набуде вигляду:

$$x_i(t_k)=\bar{x}_i(t_k)+d_{ik}, t_k\in(0{,}T), i=1{,}2. \quad (151)$$

З врахуванням (151), рівність (149) запишемо у наступній формі:

$$\hat{u}_1(t)-q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^{m}q_{11k}^2(y_{1k}-\bar{x}_1(t_k)-d_{1k})\tilde{g}_{1k}(t)-$$

$$-q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^{m}q_{12k}^2(y_{2k}-\bar{x}_2(t_k)-d_{2k})\tilde{g}_{2k}(t)=0, t\in(0{,}T).$$

Помноживши обидві частини рівності (149) на $\tilde{g}_{1j}(t)$, $t\in(0{,}T)$, $j=\overline{1,m}$ і проінтегрувавши, отримаємо рівняння:

$$\int_0^T \tilde{g}_{1j}(t)\hat{u}_1(t)dt-\int_0^T \tilde{g}_{1j}(t)q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^{m}q_{11k}^2(y_{1k}-x_1(t_k))\tilde{g}_{1k}(t)dt-$$

$$-\int_0^T \tilde{g}_{1j}(t)q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^{m}q_{12k}^2(y_{2k}-x_2(t_k))\tilde{g}_{2k}(t)dt=0, j=\overline{1,m}. \quad (152)$$

Із (152), врахувавши (151), маємо:

$$-\int_0^T \tilde{g}_{1j}(t)q_2^{-2}(t)\sum_{k=1}^{m}q_{11k}^2(y_{1k}-\bar{x}_1(t_k)-d_{1k})\tilde{g}_{1k}(t)dt+$$

$$+\bar{x}_1(t_j)-\int_0^T \tilde{g}_{1j}(t)q_2^{-2}(t)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}q_{12k}^2(y_{2k}-\bar{x}_2(t_k)-d_{2k})\tilde{g}_{2k}(t)dt=0, j=\overline{1,m}. \quad (153)$$

Співвідношення (153) можна представити також у формі:

$$\bar{x}_1(t_j) - \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - \bar{x}_1(t_k) - d_{1k})\times$$

$$\times \int_0^T q_2^{-2}(t)\tilde{g}_{1j}(t)\tilde{g}_{1k}(t)dt - \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - \bar{x}_2(t_k) - d_{2k})\times$$

$$\times \int_0^T q_2^{-2}(t)\tilde{g}_{1j}(t)\tilde{g}_{2k}(t)dt = 0, j = \overline{1,m}. \tag{154}$$

Використовуючи раніше введені позначення, вираз (154) набуде остаточного представлення:

$$\bar{x}_1(t_j) + \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(1)} + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(1)} - \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(2)}, j = \overline{1,m}.$$

За допомогою аналогічних міркувань отримуємо вираз для $\bar{x}_2(t_j)$, $j = \overline{1,m}$:

$$\bar{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(3)} + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(4)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(3)} - \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(4)}, j = \overline{1,m}.$$

Запишемо вище отримані результати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{x}_i(t_j)$, $j = \overline{1,m}$, $i = 1{,}2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{x}_1(t_j) + \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(1)} + \\ + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(2)} = \\ = \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(1)} - \\ - \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(2)}, \\ \bar{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(3)} + \\ + \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(4)} = \\ = \sum_{k=1}^{m} q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(3)} - \\ - \sum_{k=1}^{m} q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(4)}, \end{array} \right. \quad j = \overline{1,m}.$$

Теорема доведена. $\square$

# Розділ 6 Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації зі стаціонарними параметрами

## 6.1 Припущення та позначення

Досліджуватимемо систему вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k + b_k x_k(t)) \left( L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right), k = \overline{1,N}, t \in (0,T), \quad (155)$$

з початковими умовами:

$$x_k(0) = x_k^0 \geq 0, k = \overline{1,N}.$$

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $t_i \in (0,T)$, $i = \overline{1,m}$ спостерігаються при невідомих параметрах $\theta_k = (a_k, b_k)$, $k = \overline{1,N}$ величини $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками системи (155):

$$y_{kj} = x_k(t_j) + v_{kj}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,N},$$

де $v_{kj}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,N}$ — похибки спостережень.

Уведемо позначення

$$y = (y_1, \ldots, y_N), y_k = (y_{k1}, \ldots, y_{km})^*, k = \overline{1,N},$$

$$x = (x_1, \ldots, x_N), x_k = (x_k(t_1), \ldots, x_k(t_m))^*, k = \overline{1,N},$$

$$v_k = (v_{k1}, \ldots, v_{km})^*, k = \overline{1,N}.$$

Припускається, що

$$v_k \in V_k \subset R^m, \theta_k \in \Theta_k, k = \overline{1,N},$$

де $V_k$, $\Theta_k$, $k = \overline{1,N}$ — відомі множини.

**Означення 12.** *Прогнозними оцінками* величин $x_k(t_{m+1})$, $k=\overline{1,N}$, де $t_{m+1} > t_m$, $t_{m+1} \in (0,T)$ , назвемо:

$$\hat{x}_k(t_{m+1}) = g_k(y,x), k = \overline{1,N},$$

де $g_k(y,x)$, $k=\overline{1,N}$ — деякі функції векторних аргументів.

Позначимо через $G_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$ множини:

$$G_k(x,y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k)) \in V_k\} \cap \Theta_k, k = \overline{1,N},$$

де

$$f_k(\theta_k) = (f_{k1}(\theta_k), \dots, f_{km}(\theta_k)),$$
$$f_{kj}(\theta_k) = a_k\varphi_j + b_k\psi_{kj}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,N},$$
$$\varphi_k = L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t_j), \psi_{kj} = x_k(t_j)\varphi_k, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,N}.$$

**Теорема 44.** *Нехай мноини $V_k$, $k=\overline{1,N}$ — обмежені, а вектори $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ та $\psi(k) = (\psi_{k1}, \dots, \psi_{km})$ є лінійно незалежними при кожному $k$, $k = \overline{1,N}$. Тоді множини $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ обмежені в $R^2$.*

*Доведення.* Оскільки множини $V_k$, $k = \overline{1,N}$ — обмежені, то при деякому $q^2$ справедливе включення $V_k \subseteq S_q(k)$, $k=\overline{1,N}$, де

$$S_q(k) = \left\{v_k : (v_k,v_k) \le q^2\right\}, k = \overline{1,N}.$$

Звідси множини $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ будуть включатись в множини $G_k^+(x,y)$, $k=\overline{1,N}$, де

$$G_k^+(x,y) = G_k^{(1)} \cap \Theta_k, G_k^{(1)} = \left\{\theta_k : \Phi_k(\theta_k) \le q^2\right\}, k = \overline{1,N}, \quad (156)$$

$$\Phi_k(\theta_k) = (y_k - f_k(\theta_k), y_k - f_k(\theta_k)), k = \overline{1,N}.$$

Оскільки $\hat{\theta}_k$, $k = \overline{1,N}$ точки мінімуму функціій $\Phi_k(\theta_k)$, $k=\overline{1,N}$, то виконується рівність:

$$\Phi_k'(\hat{\theta}_k) = 0, k = \overline{1,N}.$$

Розкладемо функції $\Phi_k(\theta_k)$, $k = \overline{1,N}$ в ряд Тейлора в відповідних точках $\hat{\theta}_k$, $k=\overline{1,N}$ і одержимо:

$$\Phi_k(\theta_k) \cong \Phi_k(\hat{\theta}_k) + \frac{1}{2}(\Phi_k''(\hat{\theta}_k)(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), k = \overline{1,N},$$

де $\Phi''_k(\hat{\theta}_k)$ , $k = \overline{1,N}$ — матриці других похідних, які дорівнюють $2P_k$, $k = \overline{1,N}$; $\hat{\theta}_k \in Arg\min \Phi_k(\theta_k)$, $k = \overline{1,N}$.

Тут

$$P_k = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) \end{pmatrix}, k = \overline{1,N},$$

$$P_{11}(k) = (\varphi, \varphi), P_{22}(k) = (\psi(k), \psi(k)), k = \overline{1,N},$$

$$P_{12}(k) = P_{21}(k) = (\varphi, \psi(k)), k = \overline{1,N}.$$

Тоді множини $G_k^{(1)}(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ можна представити у вигляді:

$$G_k^{(1)}(x,y) = \left\{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k),\theta_k - \hat{\theta}_k) \leq q^2 - \Phi_k(\hat{\theta_k})\right\}, k = \overline{1,N}.$$

Оскільки множини $G_k^{(1)}(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ обмежені, то обмеженими є і множини $G_k^{+}(x,y)$, $k = \overline{1,N}$, а значить і множини $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$. $\square$

## 6.2 Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок

### 6.2.1 Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок для базової моделі

Позначимо вектори параметрів:

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N), \theta_k \in G_k(x,y), k = \overline{1,N}$$

і множину прогнозних оцінок вектора

$$x(t_{m+1},\theta) = (x_1(t_{m+1},\theta), \ldots, x_N(t_{m+1},\theta)),$$

яка визначається наступним чином:

$$X = \{x(t_{m+1},\theta)\}.$$

Уведемо також на вимірних підмножинах множин $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ ймовірнісні міри $\mu_k(\cdot)$, $k = \overline{1,N}$, такі, що $\mu_k(G_k(x,y)) = 1$, $k = \overline{1,N}$.

Якщо $\hat{x}(\theta) = \hat{x}(t_{m+1},\theta)$ — деяка прогнозна оцінка, то визначимо середнє квадратичну похибку такої оцінки у вигляді:

$$\sigma(\hat{x}) = \left\{ \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - x(\theta)|^2 \mu(d\theta) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де

$$G(x,y) = \prod_{k=1}^{N} G_k(x,y), \mu(d\theta) = \prod_{k=1}^{N} \mu_k(d\theta).$$

**Означення 13.** Величину $\tilde{x}$, що визначається з умови:

$$\tilde{x} \in Arg \min_{\hat{x} \in X} \sigma(\hat{x}),$$

назвемо *усередненою оптимальною середнє квадратиною прогнозною оцінкою* величини $x(t_{m+1},\theta)$, (далі УОСКП-оцінка), а величину $\sigma(\tilde{x})$ — *середнє квадратичною похибкою* такої оцінки.

**Теорема 45.** *УОСКП-оцінка має вигляд:*

$$\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1},\theta)\mu(d\theta), \tag{157}$$

*де рівність виконується майже скрізь по мірі $\mu(\cdot)$; при цьому*

$$\sigma^2(\tilde{x}) = \int_{G(x,y)} |x(t_{m+1},\theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2.$$

*Доведення.* Оскільки виконується нерівність:

$$\sigma^2(\hat{x}) = \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta) +$$

$$+ \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) \geq$$

$$\geq \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta),$$

то

$$\sigma^2(\tilde{x}) = \min_{\hat{x} \in X} \sigma^2(\hat{x}) = \min_{\hat{x} \in X} \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - x(\theta)|^2 \mu(d\theta) =$$

$$= \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) =$$

$$= \int_{G(x,y)} |x(t_{m+1},\theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2,$$

і мінімум досягається на такому векторі $\tilde{x}(\theta)$, для якого виконується рівність:

$$\int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta) = 0.$$

Тоді майже скрізь по мірі $\mu(\cdot)$ виконується рівність

$$\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1},\theta)\mu(d\theta),$$

що й потрібно було довести. $\square$

Нехай далі вектори $v_k$, $k = \overline{1,N}$ належать відповідним множинам $V_k$, $k = \overline{1,N}$ вигляду:

$$V_k = \{v_k : (Q_k v_k, v_k) \leq 1\},$$

де $Q_k$, $k = \overline{1,N}$ — відомі додатно визначені матриці; а для векторів $\theta_k$, $k = \overline{1,N}$ відомо, що $\theta_k \in R^2$, $k = \overline{1,N}$.

**Теорема 46.** *Нехай вектори $\varphi$, $\psi(k)$, $k = \overline{1,N}$ — лінійно незалежні. Тоді множини $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ мають також вигляд:*

$$G_k(x,y) = \left\{\theta_k : (\bar{P}_k(\theta_k - \hat{\theta}_k),\theta_k - \hat{\theta}_k) \leq \gamma^2\right\}, k = \overline{1,N},$$

*де $\bar{P}_(k)$, $k = \overline{1,N}$ — матриці з елементами $\bar{P}_{ij}$, $i,j = 1,2$, $k = \overline{1,N}$, що обчислюються за формулами:*

$$\bar{P}_{11}(k) = (Q_k\varphi, \varphi), \bar{P}_{22}(k) = (Q_k\psi(k), \psi(k)), k = \overline{1,N},$$

$$\bar{P}_{12}(k) = \bar{P}_{21}(k) = (Q_k\varphi, \psi(k)), k = \overline{1,N}.$$

*Тут вектори $\hat{\theta} = (\hat{a}_k,\hat{b}_k)$, $k = \overline{1,N}$ є розв'язками систем рівнянь:*

$$\begin{cases} \bar{P}_{11}(k)a_k + \bar{P}_{12}(k)b_k = (Q_k y_k,\varphi), \\ \bar{P}_{21}(k)a_k + \bar{P}_{22}(k)b_k = (Q_k y_k,\psi(k)), \end{cases} \tag{158}$$

*а параметри* $\gamma_k$, $k=\overline{1,N}$ *наступні:*

$$\gamma_k = 1 - \bar{\Phi}_k(\bar{\theta}_k),$$

*де*

$$\bar{\Phi}_k(\theta_k) = (Q_k(y_k - a_k\varphi - b_k\psi(k)), y_k - a_k\varphi - b_k\psi(k)), k=\overline{1,N}.$$

*Доведення.* Зауважимо спочатку, що

$$\min_{\theta} \bar{\Phi}_k(\theta_k) = \bar{\Phi}_k(\hat{\theta}_k),$$

де $\hat{\theta}_k$, $k=\overline{1,N}$ визначаються із систем рівнянь (158).

Із формули Тейлора будемо мати вирази:

$$\bar{\Phi}_k(\theta_k) \cong \bar{\Phi}_k(\hat{\theta}_k) + (\bar{P}_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), k=\overline{1,N},$$

із яких отримуємо представлення:

$$G_k(x,y) = \left\{\theta_k : (\bar{P}_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq 1 - \bar{\Phi}_k(\hat{\theta}_k)\right\}, k=\overline{1,N},$$

що й треба було показати. □

*Наслідок* 14. Візьмемо міри $\mu_k(\cdot)$, $k=\overline{1,N}$ у вигляді:

$$\mu_k(d\theta) = d\theta / S(G_k(x,y)), k=\overline{1,N},$$

де $S(G_k(x,y))$ — площа еліпсу $G_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$.

Тоді справедлива рівність:

$$\tilde{x} = \pi^{-N} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{\lambda_1(k)\lambda_2(k)}{\gamma_k}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\bar{G}(x,y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}) d\theta,$$

де $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_N)$, а $\lambda_1(k)$ та $\lambda_2(k)$ — власні числа матриць $\bar{P}_k$, $k=\overline{1,N}$.

Тут множина $\bar{G}(x,y)$ має вигляд:

$$\bar{G}(x,y) = \prod_{k=1}^{N} \bar{G}_k(x,y),$$

де

$$\bar{G}_k(x,y) = \left\{\theta_k : (\bar{P}_k\theta_k, \theta_k) \leq \gamma_k\right\}, k=\overline{1,N}.$$

### 6.2.2 Побудова усереднених оптимальних прогнозних оцінок для моделі поширення інформації, що містить механізми забування, двокрокового охоплення інформацією та поділ соціуму на дві однорідні підгрупи

Розглянемо окремий випадок системи (155), коли соціум піддається впливу інформаційних повідомлень з одного джерела.

Вважатимемо, що спільнота складається з двох однорідних підгруп, чисельністю $L_1$ та $L_2$ ($L_1 + L_2 = L$, $L_i > 0$, $i = 1,2$): перша підгрупа може сприймати інформацію, що розповсюджується як через ЗМІ, так і через міжособистіне спілкування; друга підгрупа засвоює лише інформацію, що надходить у процесі міжособистісного спілкування. Переходи індивідів з однієї підгрупи в іншу відсутні.

Також припускається, що індивід, потрапивши вперше під вплив інформаційної дії, стає пасивним прихильником, а потрапивши вдруге — активним прихильником, який поширює інформаційне повідомлення серед ще не охопленої частки соціуму.

Позначимо кількість активних та пасивних прихильників в момент часу $t \in (0,T)$ в першій підгрупі, відповідно, $x_1(t)$, $t \in (0,T)$ та $x_3(t)$, $t \in (0,T)$, в другій — $x_2(t)$, $t \in (0,T)$ та $x_4(t)$, $t \in (0,T)$.

Додамо припущення, що індивіди забувають трансльовану інформацію: активні прихильники забувають з інтенсивністю $c > 0$ і стають пасивними прихильниками; пасивні прихильники забувають з інтенсивністю $r > 0$ й повертаються до неохоплених членів відповідних їм підгруп.

Нехай члени спільноти не можуть розпізнати, до якої підгрупи відноситься конкретний індивід. Тоді, позначивши через $a$ — інтенсивність повідомлень у ЗМІ, через $b$ — інтенсивність міжособистісного спілкування, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (a + b\,[x_1(t) + x_2(t)])x_3(t) - cx_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = b\,[x_1(t) + x_2(t)]\,x_4(t) - cx_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = (a + b\,[x_1(t) + x_2(t)])\times \\ \times(L_1 - x_1(t) - x_3(t)) - rx_3(t) + cx_1(t), \\ \dot{x}_4(t) = b\,[x_1(t) + x_2(t)]\times \\ \times(L_2 - x_2(t) - x_4(t)) - rx_4(t) + cx_2(t), \end{cases} \quad t \in (0,T), \qquad (159)$$

і початковими умовами:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0. \qquad (160)$$

Позначимо через $\theta = (a,b,c,r)^*$, $\theta \in \Theta \subseteq R^4$, де $\Theta$ — задана множина параметрів моделі (159). Тоді розв'язок задачі Коші (159), (160) залежить від значення параметру $\theta$ і позначатимемо $x_k(t,\theta)$, $k = \overline{1,4}$, $t \in (0,T)$.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $t_i \in (0,T)$, $i = \overline{1,m}$ спостерігаються при конкретних невідомих параметрах $\theta_0 = (a,b,c,r)^*$, $\theta_0 \in \Theta$ функції $x_k(t)$, $k = \overline{1,4}$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками задачі Коші (159), (160):

$$y_{kj} = \dot{x}_k(t_j) + v_{kj}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,4},$$

де $v_{kj}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,4}$ — похибки спостережень.

Уведемо позначення $y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{4j})^*$, $v_j = (v_{1j}, \ldots, v_{4j})^*$, $j = \overline{1,m}$.

Відомо також, що невідомі вектори похибок спостережень $v_j$, $j = \overline{1,m}$ задовольняють нерівність:

$$\sum_{j=1}^{m} (Q_j v_j, v_j) \leq 1,$$

де $Q_j$, $j = \overline{1,m}$ — додатно визначені матриці.

Уведемо векторну функцію $x(t) = (x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))^*$, $t \in (0,T)$ та матрицю $F(t,x(t))$, $t \in (0,T)$ вигляду:

$$F(t,x(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & -x_1(t) & 0 \\ 0 & \psi_2(t) & -x_2(t) & 0 \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & x_1(t) & -x_3(t) \\ 0 & \psi_4(t) & x_2(t) & -x_4(t) \end{pmatrix}, t \in (0,T),$$

де

$$\varphi_1(t) = x_3(t), t \in (0,T),$$

$$\psi_1(t) = (x_1(t) + x_2(t))\varphi_1(t), t \in (0,T),$$

$$\psi_2(t) = (x_1(t) + x_2(t))x_4(t), t \in (0,T),$$

$$\varphi_3(t) = L_1 - x_1(t) - x_3(t), t \in (0,T),$$

$$\psi_3(t) = (x_1(t) + x_2(t))\varphi_3(t), t \in (0,T),$$

$$\psi_4(t) = (x_1(t) + x_2(t))(L_2 - x_2(t) - x_4(t)), t \in (0,T).$$

Тоді системy рівнянь (159) можна представити у векторно-матричній формі:

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t))\theta, t \in (0,T).$$

Із нерівності

$$\sum_{j=1}^{m} (Q_j v_j, v_j) \leq 1,$$

отримаємо представлення:

$$\tilde{\Phi}(\theta) = \sum_{j=1}^{m} (Q_j(y_j - F(t_j,x(t_j))\theta), y_j - F(t_j,x(t_j))\theta) \leq 1. \qquad (161)$$

Нехай $\hat{\theta}_m \in Arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{\Phi}(\theta)$ — точка мінімуму функції $\tilde{\Phi}(\theta)$, $\theta \in \Theta$, тобто з необхідних умов оптимальності має виконуватись рівність:

$$\tilde{\Phi}'(\hat{\theta}_m) = 0.$$

Розкладемо функцію $\tilde{\Phi}(\theta)$, $\theta \in \Theta$ в ряд Тейлора в околі точки $\hat{\theta}_m$:

$$\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m) + (\tilde{H}_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m), \qquad (162)$$

де

$$\tilde{H}_m = \sum_{j=1}^{m} F^*(t_j,x(t_j)) Q_j F(t_j,x(t_j)).$$

Із формул (161), (162) випливає нерівність:

$$(\tilde{H}_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m) \leq 1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m). \qquad (163)$$

**Теорема 47.** *Якщо $\lambda_{m,min}$ є мінімальним власним числом матриці $\tilde{H}_m$ та $\lambda_{m,min} \to \infty$ при $m \to \infty$, то $\hat{\theta}_m \to \theta_0$ при $m \to \infty$.*

*Доведення.* Нерівність (163) має розв'язки, коли матриця $\tilde{H}_m$ є додатно визначеною, тобто повинна виконуватись умова:

$$\tilde{H}_m \geq \lambda_{m,min} E,$$

де $E$ — одинична матриця розмірності $4 \times 4$.

Тоді з врахуванням виразу (163) задовольняються нерівності:

$$\lambda_{m,min}(\theta - \hat{\theta}_m, \theta - \hat{\theta}_m) \leq \frac{1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m)}{\lambda_{m,min}} \leq \frac{1}{\lambda_{m,min}}. \tag{164}$$

Із (164) випливає $(\theta - \hat{\theta}_m, \theta - \hat{\theta}_m) \to \infty$ при $\lambda_{m,min} \to \infty$, тобто $\hat{\theta}_m \underset{m\to\infty}{\to} \theta_0$, що і треба було довести. □

Позначимо далі через $\tilde{G}(x,y)$ множину вигляду:

$$\tilde{G}(x,y) =$$

$$= \left\{ \theta : \sum_{j=1}^{m} (Q_j(y_j - F(t_j,x(t_j))\theta), y_j - F(t_j,x(t_j))\theta) \leq 1 \right\} \cap \Theta.$$

Візьмемо міру $\mu(\cdot)$ у вигляді:

$$\mu(d\theta) = d\theta / V(\tilde{G}(x,y)),$$

де

$$V(\tilde{G}(x,y)) = \int_{\tilde{\tilde{G}}(x,y)} d\theta,$$

$$\tilde{\tilde{G}}(x,y) = \left\{ \theta : (\tilde{H}_m \theta, \theta) \leq 1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m) \right\} \cap \Theta, \Theta = R^4.$$

Покладемо $\bar{\theta} = \theta - \hat{\theta}_m$, $d\bar{\theta} = d(\theta - \hat{\theta}_m) = d\theta$. Оскільки $\tilde{\tilde{G}}(x,y)$ — 4-х вимірний еліпсоїд, то [120] :

$$\int_{\tilde{\tilde{G}}(x,y)} d\theta = \frac{1}{2}\pi^2 \prod_{k=1}^{4} \left( \frac{\lambda_k}{1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m)} \right)^{-1/2}, \tag{165}$$

де $\lambda_k$, $k = \overline{1,4}$ — власні числа матриці $\tilde{H}_m$.

Із формули для УОСКП-оцінки (157) отримаємо:

$$\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta)\mu(d\theta) =$$

$$= \left( \int_{\tilde{\tilde{G}}(x,y)} ds \right)^{-1} \int_{\tilde{\tilde{G}}(x,y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}_m)) d\theta. \tag{166}$$

Підставивши (165) в (166), одержимо вираз:

$$\tilde{x} = 2\pi^{-2} \prod_{k=1}^{4} \left( \frac{\lambda_k}{1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m)} \right)^{1/2} \int_{\tilde{\tilde{G}}(x,y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}_m)) d\theta.$$

## 6.3 Побудова гарантованих прогнозних оцінок

Розглянемо далі гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1},\theta)$, $k=\overline{1,N}$. Припустимо, що вектори $\theta_k$, $k=\overline{1,N}$ належать заданим множинам $\Theta_k \subset R^2$, $k=\overline{1,N}$.

**Означення 14.** *Гарантованими прогнозними оцінками* величин $x_k(t_{m+1},\theta)$, $k=\overline{1,N}$ назвемо вектори $z_k$, $k=\overline{1,N}$, які визначаються із умов:

$$\min_{\eta_i,i=\overline{1,N}}\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}|x_k(t_{m+1},\eta_1,\ldots,\eta_N)-x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)|=$$

$$=\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}|z_k-x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)|=\sigma_{1k},k=\overline{1,N},$$

(тут $\eta_i\in G_k(x,y)$, $\theta_i\in G_k(x,y)$, $i=\overline{1,N}$); а величини $\sigma_{1k}$, $i=\overline{1,N}$ назвемо *гарантованими похибками* оцінок $z_k$, $k=\overline{1,N}$.

**Теорема 48.** *Нехай множини $G_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$ — обмежені та замкнені. Гарантовані прогнозні оцінки $z_k$, $k=\overline{1,N}$ мають вигляд:*

$$z_k=\frac{1}{2}\left(\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)+\right.$$

$$\left.+\min_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)\right),$$

$$\theta_i\in G_k(x,y),i=\overline{1,N},$$

*при цьому*

$$\sigma_{1k}=\frac{1}{2}\left(\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)-\right.$$

$$\left.-\min_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)\right),$$

$$\theta_i\in G_k(x,y),i=\overline{1,N}.$$

*Доведення.* Зауважимо, що величини $x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)$, $k=\overline{1,N}$ належать відповідним відрізкам $[x_k^-,x_k^+]$, $k=\overline{1,N}$, де

$$x_k^-=\min_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N),\theta_i\in G_k(x,y),i=\overline{1,N},$$

$$x_k^+ = \max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1},\theta_1,\dots,\theta_N), \theta_i \in G_k(x,y), i=\overline{1,N}.$$

Тоді виконується нерівність:

$$\max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} |x_k(t_{m+1},\eta_1,\dots,\eta_N) - x_k(t_{m+1},\theta_1,\dots,\theta_N)| =$$

$$= |x_k(t_{m+1},\eta_1,\dots,\eta_N) - \frac{1}{2}(x_k^- + x_k^+)| + \sigma_{1k} \geq$$

$$\geq \sigma_{1k}, \eta_i \in G_k(x,y), \theta_i \in G_k(x,y), i=\overline{1,N},$$

а значить, нижня границя досягається на значеннях, які дорівнюють векторам $z_k$, $k=\overline{1,N}$, що і потрібно було довести. □

Розглянемо тепер випадок, коли в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_i \in (0,T)$, $i = \overline{1,m}$ спостерігаються вектори $x(t_j,\theta) = (x_1(t_j,\theta),\dots,x_N(t_j,\theta))^*$, $j = \overline{1,m}$, що є розв'язками системи (155) при деяких значеннях параметрів $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_N)$:

$$\bar{y}_j = H_j x(t_j,\theta) + \bar{v}_j, j=\overline{1,m},$$

де $H_j$, $j=\overline{1,m}$ — матриці розмірності $m \times N$, $\bar{v}_j$, $j=\overline{1,m}$ — невідомі завади.

Будемо припускати що, вектор $\bar{v} = (\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_m)$ та вектор параметрів $\theta$ належать, відповідно, множинам $\bar{V}$ та $\Theta$.

Позначимо

$$\Theta_y = \{\theta : (y_1 - H_1 x(t_1,\theta),\dots,y_m - H_m x(t_m,\theta)) \in V\} \cap \Theta.$$

Припустимо, що множина $\Theta_y$ — обмежена. Через $co\Theta_y$ позначимо найменшу замкнену опуклу множину, що містить в собі множину $\Theta_y$. На множині $\Theta_y$ розглянемо гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1},\theta)$, $k=\overline{1,N}$, які знаходяться з умов:

$$\min_{\hat{\theta}\in co\Theta_y} \max_{\theta\in co\Theta_y} |x_k(t_{m+1},\hat{\theta}) - x_k(t_{m+1},\theta)| =$$

$$= \max_{\theta\in co\Theta_y} |\hat{x}_k - x_k(t_{m+1},\theta)| = \sigma_{2k}, k=\overline{1,N}.$$

**Теорема 49.** *Гарантовані прогнозні оцінки $\hat{x}_k$, $k = \overline{1,N}$ обчислюютьcя за формулами:*

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ + \hat{x}_k^-), k=\overline{1,N},$$

*де*

$$\hat{x}_k^+ = \max_{\theta \in co\Theta_u} x_k(t_{m+1},\theta), \hat{x}_k^- = \min_{\theta \in co\Theta_u} x_k(t_{m+1},\theta), k = \overline{1,N};$$

*а для похибки* $\sigma_{2k}, k = \overline{1,N}$ *справедлива рівність:*

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^-), k = \overline{1,N}.$$

*Доведення.* Величини $x_k(t_{m+1},\theta)$ належать відповідним відрізкам $[\hat{x}_k^-,\hat{x}_k^+]$, $k = \overline{1,N}$, і виконується нерівність:

$$\max_{\theta \in co\Theta_y} |x_k(t_{m+1},\eta) - x_k(t_{m+1},\theta)| =$$

$$= |x_k(t_{m+1},\eta) - \frac{1}{2}(\hat{x}_k^- + \hat{x}_k^+)| + \sigma_{2k} \geq \sigma_{2k}, \eta \in co\Theta_y, k = \overline{1,N},$$

останній вираз перетворюється в рівність при $\hat{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^- + \hat{x}_k^+)$, $k = \overline{1,N}$, що і потрібно було довести. □

Розглянемо випадок, коли множина $\Theta = R^{2N}$, а множину $\bar{V}$ можна представити також у вигляді:

$$\bar{V} = \left\{ \bar{v} : \sum_{j=1}^{m} (Q_j \bar{v}_j, \bar{v}_j) \leq 1 \right\},$$

де $Q_j$, $j = \overline{1,m}$ — дадатно визначені матриці.

Тоді згідно з (156) для множини $\Theta_y$ справедливе представлення:

$$\Theta_y = \left\{ \theta : \sum_{j=1}^{m} (Q_j(y_j - H_j x(t_j,\theta)), y_j - H_j x(t_j,\theta)) \leq 1 \right\},$$

і задачі знаходження гарантованих оцінок і похибок прогнозних оцінок зведуться до проблеми знаходження значень $\min_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1},\theta)$ та $\max_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1},\theta)$ на множині $\Theta_y$.

Розглянемо знаходження УОСКП-оцінки для окремого випадку системи (155) при $N = 1$ і зовнішній вплив відсутні, тобто $a_1 = 0$, а параметр інтенсивності міжособистісного спілкування $b_1 \in R$, $k = \overline{1,N}$ невідомий.

При таких припущеннях система (155) набуде представлення:

$$\dot{x}_1(t) = b_1 x_1(t)(L - x_1(t)), x_1(0) = x_1^0, t \in (0,T). \tag{167}$$

Спостереження за функціями $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$ мають вигляд:

$$\bar{y}_j = \dot{x}_1(t_j) + \bar{v}_j, j = \overline{1,m},$$

причому

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{v}_j^2 \leq \delta_m^2.$$

Тоді згідно з (156) отримаємо вираз:

$$G(x,y) = \left\{ b_1 : \sum_{j=1}^{m} (\bar{y}_j - b_1 x_1(t_j)(L - x_1(t_j)))^2 \leq \delta_m^2 \right\}.$$

Із нерівності

$$\sum_{j=1}^{m} (\bar{y}_j - b_1 x_1(t_j)(L - x_1(t_j)))^2 \leq \delta_m^2,$$

маємо формулу:

$$b_1^2 \sum_{j=1}^{m} [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2 - 2b_1 \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} y_j^2 - \delta_m^2 \leq 0.$$

Звідси одержимо нерівність:

$$(b_1 - \underline{b}_1)(b_1 - \bar{b}_1) \leq 0, \tag{168}$$

де

$$\underline{b}_1 = \frac{2\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) - \sqrt{D}}{2\sum_{j=1}^{m} [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2},$$

$$\bar{b}_1 = \frac{2\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) + \sqrt{D}}{2\sum_{j=1}^{m} [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2},$$

$$D = 4\left[\sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j))\right]^2 +$$
$$+4(\delta_m^2 - \sum_{j=1}^{m} y_j^2)\sum_{j=1}^{m}[x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2 \geq 0.$$

Тоді, в силу розв'язку нерівності (168), буде справджуватись представлення:

$$G(x,y) = [\underline{b}_1, \overline{b}_1].$$

Для того, щоб знайти УОСКП-оцінку ($\mu$-усереднену оптимальну прогнозну оцінку, де $\mu(\cdot)$ — міра Лебега), розв'яжемо рівняння Ріккаті:

$$\dot{x}_1(t) = b_1 L x_1(t) - b_1 x_1^2(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0,T).$$

Зробимо заміну:

$$h(t) = 1/x_1(t), t \in (0,T),$$

і одержимо диференціальне рівняння з початковою умовою:

$$\dot{h}_t = b_1 - b_1 L h(t), h(0) = 1/x_1^0. \tag{169}$$

Застосувавши до (169) формулу Коші, матимемо вираз:

$$h(t) = 1/x_1^0 \exp\left\{-\int_0^t b_1 L ds\right\} +$$
$$+\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b_1 L ds\right\} b_1 d\tau =$$
$$= \frac{x_1^0 + (L - x_1^0)e^{-b_1 L t}}{x_1^0 L}, t \in (0,T).$$

Звідси розв'язок диференціального рівняння (167) обчислюються за формулою:

$$x_1(t) = \frac{x_1^0 L}{x_1^0 + (L - x_1^0)e^{-b_1 L t}}, t \in (0,T).$$

Тоді для $\tilde{x}_1$ будуть справедливі перетворення:

$$\tilde{x}_1 = \int_{G(x,y)} x_1(t_{m+1}, b_1)\mu(db_1) =$$

$$= \frac{1}{\overline{b}_1 - \underline{b}_1} \int_{\underline{b}_1}^{\overline{b}_1} x_1(t_{m+1}, b_1) db_1 =$$

$$= \frac{1}{\overline{b}_1 - \underline{b}_1} \int_{\underline{b}_1}^{\overline{b}_1} \frac{x_1^0 L db_1}{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-b_1 L t_{m+1}}}.$$

Увівши позначення $p(b_1) = e^{-b_1 L t_{m+1}}$, отримаємо $dp = = -L t_{m+1} e^{-b_1 L t_{m+1}} db_1$ і знайдемо УОСКП-оцінку $\tilde{x}_1$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{-x_1^0}{(\overline{b}_1 - \underline{b}_1) t_{m+1}} \int_{e^{-\underline{b}_1 L t_{m+1}}}^{e^{-\overline{b}_1 L t_{m+1}}} \frac{dp}{p(x_1^0 + (L - x_1^0) p)} =$$

$$= L - \frac{1}{(\overline{b}_1 - \underline{b}_1) t_{m+1}} \ln \left| \frac{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-\underline{b}_1 L t_{m+1}}}{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-\overline{b}_1 L t_{m+1}}} \right|.$$

# Розділ 7 Гарантовані прогнозні оцінки розв‘язків систем диференціальних рівнянь з динамікою Гомперца

## 7.1 Припущення та означення

Досліджується нелінійна система

$$\frac{dx_k(t;f(\cdot))}{dt} = [(B(t)f(t),e^k)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(A(t)e^k,e^j)lnx_k(t;f(\cdot))]x_k(t;f(\cdot)),t\in(0,T_2),k=\overline{1,n}, \quad (170)$$

з початковими умовами:

$$x_k(0;f(\cdot)) = x_k^0 > 0,k=\overline{1,n},$$

де матричні функції $A(t)\in R^{n\times n}$, $B(t)\in R^{n\times m}$, $t\in(0,T_2)$ мають неперервні компоненти; $f(\cdot)\in R^m$, $f(\cdot)\in L_2(0,T_2)$ — невідома функція; вектор $e^k$ — $k$-ий орт, $k=\overline{1,n}$. Для розв'язків системи справедливі нерівності $x_k(t;f(\cdot))>0$, $t\in(0,T_2)$, $k=\overline{1,n}$.

Будем вважати, що відомі спостереження $y_i(t)$, $t\in(0,T_1)$, $T_1\le T_2$, $i=\overline{1,n_0}$, $n_0\le n$ функції $x_i(t;f(\cdot))$, $t\in(0,T_1)$ при деякій $f(t)$, $t\in(0,T_1)$:

$$y_i(t) = x_i(t;f(\cdot))+v_i(t),t\in(0,T_1),i=\overline{1,n_0},$$

де $v_i(t)$, $t\in(0,T_1)$, $i=\overline{1,n_0}$ — невідомі похибки.

Введемо позначення $x(t;f(\cdot)) = (x_1(t;f(\cdot)),\ldots,x_n(t;f(\cdot)))^T$, $t\in(0,T_2)$; $v(t)=(v_1(t),\ldots,v_{n_0}(t))^T$, $t\in(0,T_1)$, де $T$ — символ транспонування.

Припускається, що функція $f(\cdot) \in G$, де $G$ — обмежена, замкнена та випукла множина в $L_2(0,T_2)$; $v_i(t)$, $t \in (0,T_1)$, $i = \overline{1,n_0}$ — неперервні на $(0,T_1)$ функції множини $V$:

$$V = \left\{ v(\cdot) : \underline{v}_i(t) \leq v_i(t) \leq \overline{v}_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0} \right\},$$

де $\underline{v}_i(t)$, $\overline{v}_i(t)$, $t \in (0,T_1)$, $i = \overline{1,n_0}$ — відомі функції, причому виконуються умови:

$$y_i(t) - \overline{v}_i(t) > 0, t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}.$$

Множину $G$ також можна представити у вигляді $G = G_1 \times G_2$, де $G_1 \in L_2(0,T_1)$, $G_2 \in L_2(T_1,T_2)$.

Позначимо через $F_y$ множину вигляду:

$$F_y = \left\{ f(\cdot) : f(\cdot) \in \overline{G}_1 \times G_2 \right\},$$

де

$$\overline{G}_1 = \{ f(\cdot) : \underline{v}_i(t) \leq y_i(t) - x_i(t; f(\cdot)) \leq \\ \leq \overline{v}_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0} \}.$$

Уведемо множину $X_y$:

$$X_y = \left\{ x(T_2; f(\cdot)) : x_k(T_2; f(\cdot)) \in Q_k, k = \overline{1,n} \right\},$$

де

$$Q_k = \left\{ x_k(T_2; f(\cdot)) : \min_{f_1(\cdot) \in F_y} x_k(T_2; f_1(\cdot)) \leq x_k(T_2; f(\cdot)) \leq \right.$$

$$\left. \leq \max_{f_2(\cdot) \in F_y} x_k(T_2; f_2(\cdot)), f(\cdot) \in F_y \right\}, k = \overline{1,n}.$$

**Означення 15.** *Гарантованою прогнозною оцінкою* вектора $x(T_2; f(\cdot))$ назвемо вектор $\hat{x}(T_2) = (\hat{x}_1(T_2), \ldots, \hat{x}_n(T_2))^T$, який визначається з умов:

$$\min_{x(T_2; f(\cdot)) \in X_y} \Phi(x(T_2; f(\cdot))) = \Phi(\hat{x}(T_2)),$$

Тут функціонал $\Phi(x(T_2; f(\cdot)))$ визначається як:

$$\Phi(x(T_2; f(\cdot))) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \max_{\bar{x}(T_2;f(\cdot))\in Q_k} |x_k(T_2; f(\cdot)) - \bar{x}(T_2; f(\cdot))|\beta_k, \qquad (171)$$

а $\beta_k \geq 0$, $k = \overline{1,n}$ — відомі числа, для яких виконується умова $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$.

**Означення 16.** Величину $\sigma = \Phi(\hat{x}(T_2))$ назвемо *гарантованою прогнозною похибкою прогнозної оцінки* $\hat{x}(T_2)$.

**Лема 10.** *Для розв'язків системи (170), якщо виконуються умови* $x_k^0 > 0$, $k = \overline{1,n}$, *справедливе представлення:*

$$x_k(t; f(\cdot)) = \exp\{\varphi_k(t; f(\cdot))\}, t \in (0,T_2), k = \overline{1,n}, \qquad (172)$$

*де вектор-функція* $\varphi(t; f(\cdot)) = (\varphi_1(t; f(\cdot)), \ldots, \varphi_n(t; f(\cdot)))^T$, $t \in (0,T_2)$ *є розв'язком диференціального рівняння:*

$$\frac{d\varphi(t; f(\cdot))}{dt} = A(t)\varphi(t; f(\cdot)) + B(t)f(t), t \in (0,T_2). \qquad (173)$$

*з початковими умовами:*

$$\varphi(0; f(\cdot)) = (\ln x_1^0, \ldots, \ln x_n^0)^T.$$

*Доведення.* Справедливі рівності:

$$\frac{d \ln x_k(t; f(\cdot))}{dt} = \frac{dx_k(t; f(\cdot))}{dt} x_k^{-1}(t; f(\cdot)), t \in (0,T_2), k = \overline{1,n}.$$

Поклавши $\ln x_k(t; f(\cdot)) = \varphi_k(t; f(\cdot))$, $t \in (0,T_2)$, $k = \overline{1,n}$, отримаємо рівняння (173), що підтверджує справедливість (172). □

## 7.2 Методи знаходження прогнозних оцінок для випадку неперервних спостережень

**Теорема 50.** *Компоненти вектора гарантованої прогнозної оцінки* $\hat{x}(T_2)$ *знаходяться за формулами:*

$$\hat{x}_k(T_2) = \exp\{\hat{\varphi}_k(T_2)\} \operatorname{ch} \sigma_{\varphi_k}(T_2), k = \overline{1,n} \qquad (174)$$

*(при цьому гарантована похибка прогнозної оцінки* $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \exp\{\hat{\varphi}_k(T_2)\} sh\sigma_{\varphi_k}(T_2)\beta_k$*), де* $\hat{\varphi}_k(T_2)$, $\sigma_{\varphi_k}(T_2)$, $k = \overline{1,n}$ —

*відповідно, гарантовані прогнозні оцінки та гарантовані похибки прогнозних оцінок функцій $\varphi_k(T_2; f(\cdot))$, $k = \overline{1,n}$, які обчислюються за такими формулами:*

$$\hat{\varphi}_k(T_2) = \frac{1}{2}(\varphi_k^+(T_2) + \varphi_k^-(T_2)),$$

$$\sigma_{\varphi_k}(T_2) = \frac{1}{2}(\varphi_k^+(T_2) - \varphi_k^-(T_2)), k = \overline{1,n},$$

$$\varphi_k^+(T_2) = \ln x_k^+(T_2), \varphi_k^-(T_2) = \ln x_k^-(T_2), k = \overline{1,n},$$

$$x_k^+(T_2) = \max_{f(\cdot)\in F_y} x_k(T_2; f(\cdot)),$$

$$x_k^-(T_2) = \min_{f(\cdot)\in F_y} x_k(T_2; f(\cdot)), k = \overline{1,n}.$$

*Доведення.* Оскільки множина $G$ — обмежена, випукла та замкнена, то множина $F_y$ також буде обмеженою, випуклою та замкненою. Тому існують функції $\underline{f}^k(\cdot) \in F_y$ и $\overline{f}^k(\cdot) \in F_y$, $k = \overline{1,n}$, для яких виконуються рівності:

$$\max_{x_k(T_2;f(\cdot))\in Q_k} x_k(T_2; f(\cdot)) = x_k(T_2; \overline{f}^k(\cdot)) = x_k^+(T_2), k = \overline{1,n},$$

$$\min_{x_k(T_2;f(\cdot))\in Q_k} x_k(T_2; f(\cdot)) = x_k(T_2; \underline{f}^k(\cdot)) = x_k^-(T_2), k = \overline{1,n}.$$

Справедливі перетворення:

$$\max_{\bar{x}_k(T_2;f(\cdot))\in Q_k} |x_k(T_2; f(\cdot)) - \bar{x}_k(T_2; f(\cdot))| =$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} x_k(T_2; f(\cdot)) - x_k^-(T_2), & \text{при } x_k(T_2; f(\cdot)) \geq \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) + x_k^-(T_2)), \\ x_k^+(T_2) - x_k(T_2; f(\cdot)), & \text{при } x_k(T_2; f(\cdot)) \leq \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) + x_k^-(T_2)). \end{array} \right.$$

Останнє співвідношення можна представити у формі:

$$\max_{\bar{x}_k(T_2;f(\cdot))\in Q_k} |x_k(T_2; f(\cdot)) - \bar{x}_k(T_2; f(\cdot))| =$$

$$= \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) - x_k^-(T_2)) +$$

$$+ \left| x_k(T_2; f(\cdot)) - \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) - x_k^-(T_2)) \right|, k = \overline{1,n}. \qquad (175)$$

З (171) та (175) отримаємо вираз для $\Phi(x(T_2; f(\cdot)))$:

$$\Phi(x(T_2; f(\cdot))) = \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) - x_k^-(T_2)) + \right.$$

$$\left. + \left| x_k(T_2; f(\cdot)) - \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) - x_k^-(T_2)) \right| \right] \beta_k.$$

Звідси отримаємо вирази для знаходження компонент гарантованої прогнозної оцінки $\hat{x}(T_2)$ та гарантованної похибки:

$$\hat{x}_k(T_2) = \frac{1}{2}(x_k^+(T_2) + x_k^-(T_2)), k = \overline{1,n}, \tag{176}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (x_k^+(T_2) - x_k^-(T_2))\beta_k. \tag{177}$$

З (176) та (177), враховуючи (173), отримаємо:

$$\hat{x}_k(T_2) = \frac{1}{2} \left( e^{\varphi_k^+(T_2)} + e^{\varphi_k^-(T_2)} \right), k = \overline{1,n},$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left( e^{\varphi_k^+(T_2)} + e^{\varphi_k^-(T_2)} \right) \beta_k.$$

Оскільки

$$\varphi_k^+(T_2) = \hat{\varphi}_k(T_2) + \sigma_{\varphi_k}(T_2), k = \overline{1,n},$$

$$\varphi_k^-(T_2) = \hat{\varphi}_k(T_2) - \sigma_{\varphi_k}(T_2), k = \overline{1,n},$$

то

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left( e^{\hat{\varphi}_k(T_2) + \sigma_{\varphi_k}(T_2)} - e^{\hat{\varphi}_k(T_2) - \sigma_{\varphi_k}(T_2)} \right) \beta_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{\hat{\varphi}_k(T_2)} \frac{1}{2} \left( e^{\sigma_{\varphi_k}(T_2)} - e^{-\sigma_{\varphi_k}(T_2)} \right) \beta_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \exp\{\hat{\varphi}_k(T_2)\} \, sh\sigma_{\varphi_k}(T_2)\beta_k,$$

$$\hat{x}_k(T_2) = \frac{1}{2} \left( e^{\hat{\varphi}_k(T_2) + \sigma_{\varphi_k}(T_2)} + e^{\hat{\varphi}_k(T_2) - \sigma_{\varphi_k}(T_2)} \right) =$$

$$= e^{\hat{\varphi}_k(T_2)} \frac{1}{2} \left( e^{\sigma_{\varphi_k}(T_2)} + e^{-\sigma_{\varphi_k}(T_2)} \right) =$$

$$= \exp\{\hat{\varphi}_k(T_2)\} \operatorname{ch} \sigma_{\varphi_k}(T_2), k = \overline{1,n},$$

що і треба було показати. □

**Теорема 51.** *Множину $F_y$ можна представити у вигляді:*

$$F_y = \left\{ f(\cdot) : f(\cdot) \in \bar{\bar{G}}_1 \times G_2 \right\},$$

$$\bar{\bar{G}}_1 = \left\{ f(\cdot) : |\varphi_i(t; f(\cdot)) - \bar{\varphi}_i(t)| \le \delta_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0} \right\},$$

*де $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n_0}$, $t \in (0,T_1)$ — розв'язок задачі Коші (173), а*

$$\bar{\varphi}_i(t) = \frac{1}{2}(y_i^+(t) + y_i^-(t)), i = \overline{1,n_0}, \tag{178}$$

$$\delta_i(t) = \frac{1}{2}(y_i^+(t) - y_i^-(t)), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}, \tag{179}$$

$$y_i^-(t) = ln(y_i(t) - \overline{v}_i(t)), i = \overline{1,n_0},$$

$$y_i^+(t) = ln(y_i(t) - \underline{v}_i(t)), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}.$$

*Доведення.* Оскільки виконуються нерівності:

$$-\overline{v}_i(t) \le x_i(t; f(\cdot)) - y_i(t) \le -\underline{v}_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_i(t) - \overline{v}_i(t) \le x_i(t; f(\cdot)) \le y_i(t) - \underline{v}_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0},$$

то справедливі співвідношення:

$$\ln(y_i(t) - \overline{v}_i(t)) \le \varphi_i(t; f(\cdot)) \le$$

$$\le \ln(y_i(t) - \underline{v}_i(t)), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0},$$

тобто

$$y_i^-(t) \le \varphi_i(t; f(\cdot)) \le y_i^+(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}.$$

Останній вираз з врахуванням (178) та (179) можна представити у вигляді систем:

$$\begin{cases} \varphi_i(t; f(\cdot)) \le \bar{\varphi}_i(t) + \delta_i(t), \\ \varphi_i(t; f(\cdot)) \ge \bar{\varphi}_i(t) - \delta_i(t), \end{cases} t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\varphi_i(t; f(\cdot)) - \bar{\varphi}_i(t)| \le \delta_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n_0}.$$

Теорема доведена. □

Уведемо матрицю $\Phi(t,s)$, $t \in (s,T_2)$, $s \in (0,T_2)$, яка є розв'язком задачі Коші:

$$\frac{d\Phi(t,s)}{dt} = A(t)\Phi(t,s), \Phi(s,s) = E, t \in (s,T_2), s \in (0,T_2),$$

де $E \in R^{n\times n}$ — одинична матриця.

**Лема 11.** *Нехай* $(\widehat{\varphi(T_1),g^k})$, $k = \overline{1,n}$ *— гарантовані оцінки величин* $(\varphi(T_1; f(\cdot)); g^k)$, $k = \overline{1,n}$, *де* $g^k = \Phi^T(T_2,T_1)e^k$, $k = \overline{1,n}$. *Тоді мають місце рівності:*

$$\hat{x}_k(T_2) = \exp\left\{(\widehat{\varphi(T_1),g^k}) + \hat{\psi}_k(T_2)\right\} ch\sigma_{\varphi_k}(T_2), k = \overline{1,n}, \qquad (180)$$

*де*

$$\hat{\psi}_k(T_2) = \frac{1}{2}\left[\max_{f(\cdot)\in G_2}(\psi_k(T_2; f(\cdot)),e^k) + \right.$$

$$\left. + \min_{f(\cdot)\in G_2}(\psi_k(T_2; f(\cdot)),e^k)\right], k = \overline{1,n},$$

*а* $\psi(t; f(\cdot)) = (\psi_1(t; f(\cdot)), \ldots, \psi_n(t; f(\cdot)))^T$, $t \in (T_1,T_2)$ *знаходиться як розв'язок задачі Коші:*

$$\frac{d\psi(t; f(\cdot))}{dt} = A(t)\psi(t; f(\cdot)) +$$

$$+ B(t)f(t), t \in (T_1,T_2), \psi(T_1,f(\cdot)) = 0.$$

*Доведення.* Відмітимо, що при $t \in (T_1,T_2)$ буде справедливим вираз:

$$\varphi(t; f(\cdot)) = \Phi(t,T_1)\varphi(T_1; f(\cdot)) + \psi(t; f(\cdot)), t \in (T_1,T_2),$$

з якого одержимо:

$$\varphi_k(T_2; f(\cdot)) = (\varphi(T_1; f(\cdot)),g^k) + \psi_k(T_2; f(\cdot)), k = \overline{1,n}.$$

Для компонент гарантованної оцінки $\hat{\varphi}(T_2) = (\hat{\varphi}_1(T_2), \ldots, \hat{\varphi}_n(T_2))^T$ справедливі представлення:

$$\hat{\varphi}_k(T_2) = (\widehat{\varphi(T_1),g^k}) + \hat{\psi}_k(T_2), k = \overline{1,n}. \qquad (181)$$

Підставивши (181) в (174), отримаємо вираз (180), що і треба було показати. □

*Наслідок* 15. Нехай множина $G$ обмежена, випукла, замкнена та центрально-симетрична відносно деякої функції $\tilde{f}(t)$, $t \in (0,T_2)$. Тоді справедливі рівності:

$$\hat{\psi}_k(T_2) = (\hat{\psi}(T_2),e^k), k = \overline{1,n},$$

де вектор-функція $\hat{\psi}(t)$, $t \in (T_1,T_2)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\frac{d\hat{\psi}(t)}{dt} = A(t)\hat{\psi}(t) + B(t)\tilde{f}(t), t \in (T_1,T_2), \hat{\psi}(T_1) = 0.$$

## 7.3 Методи знаходження наближених прогнозних оцінок для випадку неперервних спостережень

Далі пропонується метод знаходження наближених оцінок величин $x_k(T_2; f(\cdot))$, $k = \overline{1,n}$ в умовах невизначеності.

Апроксимуємо множину $F_y$ множиною вигляду:

$$F_{1y} = \left\{f(\cdot) : I_y(f(\cdot)) \le \gamma^2\right\} \times G_2,$$

де

$$I_y(f(\cdot)) = \int_0^{T_2} q_1^2(t)|f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_0} \int_0^{T_1} \delta_i^{-2}(t)|(\varphi(t; f(\cdot)),e^i) - \bar{\varphi}(t)|^2 dt;$$

$q_1^2(t)$, $t \in (0,T_2)$ — додатна неперервна на $(0,T_2)$ функція, $\tilde{f}(t)$, $t \in (0,T_2)$ — відома функція з $L_2(0,T_2)$ (причому функції $q_1^2(t)$, $\tilde{f}(t)$, $t \in (0,T_2)$ та константа $\gamma^2$ обрані таким способом, щоб $F_y \subset F_{1y}$); $\delta_i^{-2}(t)$, $\bar{\varphi}_i(t)$, $t \in (0,T_1)$, $i = \overline{1,n_0}$ знаходяться за формулами (179).

**Означення 17.** Множину $F_{1y}$ назвемо *наближеною апріорною множиною* для множини $F_y$.

Знайдемо гарантовані прогнозні оцінки величин $\varphi_k(T_2; f(\cdot)) = (\varphi(T_2; f(\cdot)), e^k)$, $k = \overline{1,n}$ для наближеної апостеріорної множини $F_{1y}$.

З [121] відомо, що така оцінка має знаходиться як:

$$\hat{\varphi}_k(T_2) = (\hat{\varphi}(T_2),e^k), k = \overline{1,n}, \tag{182}$$

і при цьому для гарантованих похибок таких оцінок справедливі нерівності:

$$\sigma_{\varphi_k}(T_2) \le (e^k, P(T_2)e^k), k = \overline{1,n}, \tag{183}$$

де

$$\hat{\varphi}_k(t) = \left[ \begin{array}{ll} \hat{\varphi}_{k1}(t), & t \in (0,T_1), \\ \hat{\varphi}_{k2}(t), & t \in (T_1,T_2), \end{array} \right. k = \overline{1,n},$$

знаходяться як розв'язки задач Коші:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d\hat{\varphi}_{k1}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (A(t)e^k,e^j)\hat{\varphi}_{k1}(t) + (B(t)\tilde{f}(t),e^k) + \\ +\delta_k^2(t)(\bar{\varphi}_k(t) - \hat{\varphi}_{k1}(t)), t \in (0,T_1), \hat{\varphi}_{k1}(0) = lnx_0^k, k = \overline{1,n}, \\ \frac{d\hat{\varphi}_{k2}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (A(t)e^k,e^j)\hat{\varphi}_{k2}(t) + \\ +(B(t)\tilde{f}(t),e^k), t \in (T_1,T_2), \hat{\varphi}_{k2}(T_1) = \hat{\varphi}_{k1}(T_1), k = \overline{1,n}, \end{array} \right.$$

а матрична функція $P(t)$, $t \in (0,T_2)$ знаходиться за формулами:

$$P(t) = \left[ \begin{array}{l} P_1(t), t \in (0,T_1), \\ P_2(t), t \in (T_1,T_2), \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{dP_1(t)}{dt} = A(t)P_1(t) + P_1(t)A^T(t) - P_1(t)H^TQ(t)HP_1(t) + \\ +q_1^2(t)E, t \in (0,T_1), P_1(0) = 0, \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = A(t)P_2(t) + P_2(t)A^T(t), t \in (T_1,T_2), P_2(T_1) = P_1(T_1), \end{array} \right.$$

$$H = \{h_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, i = \overline{1,n_0}, j = \overline{1,n},$$

$$h_{ij} = \delta_{ij}, i = \overline{1,n_0}, j = \overline{1,n},$$

$$Q(t) = diag(\delta_1^2(t), \dots, \delta_{n_0}^2(t)), t \in (0,T_1),$$

і $\delta_{ij}$, $i = \overline{1,n_0}$, $j = \overline{1,n}$ — символ Кронекера.

Компоненти гарантованної прогнозної оцінки $\hat{x}(T_2)$ обчислюються за формулами (174), з врахуванням (182) та (183).

## 7.4 Методи знаходження прогнозних оцінок при спостереженнях в дискретні моменти часу

Розглянемо модель (170).

Нехай в точках $t_k$, $k = \overline{1,N}$ (для яких справедливі нерівності $0 < t_1 < \dots < t_N = T_1 < T_2$) спостерігаються значення функцій

$x_i(t; f(\cdot))$, $i = \overline{1,n}$, що є розвязками системи (170), при деяких невідомих функціях $f(t)$, $t \in (0,T_2)$ та похибками $\eta_{ik}$, $i = \overline{1,n_k}$, $n_k \le n$, $k = \overline{1,N}$:

$$y_{ik} = x_i(t_k; f(\cdot)) + \eta_{ik}, i = \overline{1,n_k}, k = \overline{1,N}.$$

Припустимо, що для функцій $f(t)$, $t \in (0,T_2)$ та величин $\eta_{ik}$, $i = \overline{1,n_k}$, $k = \overline{1,N}$ відомі множини, якім вони належать. Нехай $f(\cdot) \in G, G = G_1 \times G_2, G_1 \subset L_2(0,t_N), G_2 \subset L_2(t_N,T_2)$ та справедливі нервіності $\underline{\eta}_{ik} \le \eta_{ik} \le \overline{\eta}_{ik}$, $i = \overline{1,n_k}$, $k = \overline{1,N}$ ( тут $\underline{\eta}_{ik}$, $\overline{\eta}_{ik}$ — відомі числа).

Враховуючи, що компоненти вектора $x^0$ відомі, то для знаходження наближених гарантованих оцінок (не обмежуючи загальності), будемо вважати, що $\ln x^0 \equiv 0$.

Оскільки припускається, що виконуються нерівності $y_{ik} - \overline{\eta}_{ik} > 0, i = \overline{1,n_k}, k = \overline{1,N}$, то апостеріорна множина можливих значень функції $f(t)$, $t \in (0,T_2)$ набуде вигляду:

$$F_f = \{f(\cdot) : f(\cdot) \in G\} \cap$$

$$\cap \{f(\cdot) : \ln(y_{ik} - \overline{\eta}_{ik}) \le \varphi_i(t_k; f(\cdot)) \le$$

$$\le \ln(y_{ik} - \underline{\eta}_{ik}), i = \overline{1,n_k}, k = \overline{1,N}\Big\}$$

де $\varphi(t; f(\cdot))$, $t \in \overline{1,T_1}$ задовільняє систему (173).

Уведемо позначення $x(t; f(\cdot)) = (x_1(t; f(\cdot)), \ldots, x_n(t; f(\cdot)))^T$, $t \in (0,T_2)$.

**Лема 12.** *Нехай $G_1$ і $G_2$ замкнуті, випуклі та обмежені множини. Тоді існують функції $\overline{f}^i(\cdot) \in F_f$ та $\underline{f}^i(\cdot) \in F_f$, для яких справедливі рівності:*

$$\max_{x(T_2; f(\cdot)) \in X_y} \varphi_i(T_2; f(\cdot)) = \varphi_i(T_2; \overline{f}^i(\cdot)),$$

$$\min_{x(T_2; f(\cdot)) \in X_y} \varphi_i(T_2; f(\cdot)) = \varphi_i(T_2; \underline{f}^i(\cdot)), i = \overline{1,n}, k = \overline{1,N}.$$

*Доведення.* Доведення цієї леми випливає з обмеженості, замкнутості та опуклості множини $F_f$, а також з того, що $\varphi(T_2; f(\cdot))$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,N}$ є лінійним неперервним функціоналом в просторі $L_2(0,T_2)$. □

## 7.5 Методи знаходження наближених гарантованих прогнозних оцінок для випадку дискретних спостережень

Припустимо, що множина $G$ є центрально-симетричною відносно деякої відомої вектор-функції $\tilde{f}(\cdot) \in L_2(0,T_2)$. Для знаходження наближених прогнозних гарантованих оцінок розглянемо нижню апроксимацію $\underline{F}_f$ та верхню апроксимацію $\overline{F}_f$ множини $F_f$:

$$\underline{F}_f = \{f(\cdot) \in G_1 : I_y(f(\cdot)) \leq 1\} \times G_2,$$

$$\overline{F}_f = \left\{f(\cdot) \in G_1 : I_y(f(\cdot)) \leq \hat{\gamma}^2\right\} \times G_2,$$

де

$$I_y(f(\cdot)) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\overline{y}_{ik} - \varphi_i(t_k; f(\cdot)))^2 +$$

$$+ \int_0^{T_1} q^2(t) \|f(t) - \tilde{f}(t)\|^2 dt;$$

$$\overline{y}_{ik} = \frac{1}{2} ln(y_{ik} - \overline{\eta}_{ik})(y_{ik} - \underline{\eta}_{ik}), i = \overline{1,n_k}, k = \overline{1,N},$$

$$q_{ik}^{-1} = \frac{1}{2} ln \frac{y_{ik} - \overline{\eta}_{ik}}{y_{ik} - \underline{\eta}_{ik}}, i = \overline{1,n_k}, k = \overline{1,N}$$

та $q^2(t)$, $t \in (0,T_1)$ — деяка відома скалярна додатня функція в $L_2(0,T_1)$, $\hat{\gamma}^2 > 0$ — деяка відома величина.

Зауважимо, що функцію $\varphi(t; f(\cdot))$, $t \in (0,T_2)$, яка визначається з (173), також можна представити у формі:

$$\varphi(t; f(\cdot)) = \left[ \begin{array}{c} \tilde{\varphi}(t; f(\cdot)), t \in (0,T_1], \\ \varphi^1(t; f(\cdot)), t \in [T_1,T_2), \end{array} \right.$$

де функції $\tilde{\varphi}(t; f(\cdot))$, $t \in (0,T_1)$ та $\varphi^1(t; f(\cdot))$, $t \in (T_1,T_2)$ визначаються як розв'язки систем:

$$\frac{d\tilde{\varphi}(t; f(\cdot))}{dt} = A(t)\tilde{\varphi}(t; f(\cdot)) +$$

$$+B(t)f(t), \tilde{\varphi}(0; f(\cdot)) \equiv 0, t \in (0,T_1),$$

$$\frac{d\varphi^1(t; f(\cdot))}{dt} = A(t)\varphi^1(t; f(\cdot)) +$$

$$+B(t)f(t), \varphi^1(T_1; f(\cdot)) = \tilde{\varphi}(T_1; f(\cdot)), t \in (T_1, T_2).$$

**Теорема 52.** *Для множин* $\underline{F}_f$ *та* $\overline{F}_f$ *справедливі наступні представлення:*

$$\underline{F}_f = \left\{ f(\cdot) \in G_1 : I_2(f(\cdot)) \le 1 - I_y(\hat{f}(\cdot)) \right\} \times \{f(\cdot) \in G_2\};$$

$$\overline{F}_f = \left\{ f(\cdot) \in G_1 : I_2(f(\cdot)) \le \hat{\gamma}^2 - I_y(\hat{f}(\cdot)) \right\} \times \{f(\cdot) \in G_2\};$$

*де*

$$I_2(f(\cdot)) = \frac{1}{2}(I_y^{''}(\hat{f}(\cdot))(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)), f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)),$$

*а* $\hat{f}(\cdot) \in Arg\min_{f(\cdot) \in G} I_y(f(\cdot))$*; також виконується рівність:*

$$\frac{1}{2}(I_y^{''}(\hat{f}(\cdot))(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)), f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\overline{\varphi}_i(t_k; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)))^2 +$$

$$+ \int_0^{T_1} q^2(t) \| f(t) - \tilde{f}(t) \|^2 dt$$

*( тут* $I_y^{''}(\hat{f}(\cdot))$ *— друга похідна Фреше* $I_y(\hat{f}(\cdot))$ *в точці* $\hat{f}(\cdot)$*; а* $\overline{\varphi}(t; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)) = (\overline{\varphi}_1(t; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)), \ldots, \overline{\varphi}_n(t; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)))^T$, $t \in (0, T_1)$ *— вектор-функція, яка визначається як розв'язок наступної задачі Коші:*

$$\frac{d\overline{\varphi}(t; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot))}{dt} = A(t)\overline{\varphi}(t; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)) +$$

$$+ B(t)(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)), t \in (0, T_1), \overline{\varphi}(0; f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)) = 0.$$

*Доведення.* Оскільки $\hat{f}(t), t \in (0, T_1)$ — функція, на якій досягається мінімум функціонала $I_y(f(\cdot))$, то, використовуючи формулу Тейлора, одержимо:

$$I_y(\hat{f}(\cdot) + \tau(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot))) =$$

$$= I_y(\hat{f}(\cdot)) + \frac{1}{2}(I_y^{''}(\hat{f}(\cdot))(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)), f(\cdot) - \hat{f}(\cdot))\tau^2.$$

При $\tau = 1$ буде виконуватись рівність:

$$I_y(\hat{f}(\cdot) + \tau(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot))) =$$

$$= I_y(\hat{f}(\cdot)) + \frac{1}{2}(I_y''(\hat{f}(\cdot))(f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)), f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)).$$

Тоді для апроксимуючих апостеріорну область $F_f$ множин $\underline{F}_f$ и $\overline{F}_f$ справедливе представлення:

$$\underline{F}_f = \left\{ f(\cdot) \in G_1 : I_2(f(\cdot)) \leq 1 - I_y(\hat{f}(\cdot)) \right\} \times \{f(\cdot) \in G_2\} ;$$

$$\overline{F}_f = \left\{ f(\cdot) \in G_1 : I_2(f(\cdot)) \leq \hat{\gamma}^2 - I_y(\hat{f}(\cdot)) \right\} \times \{f(\cdot) \in G_2\} ;$$

що і потрібно було довести. Теорема доведена. □

Уведемо позначення $z_i(t)$, $t \in (T_1,T_2)$ та $\overline{z}_i(t)$, $t \in (0,T_1)$, $i = \overline{1,n}$, які є розв'язками наступних задач Коші:

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = A^T(t) z_i(t), z_i(T_2) = e^i, t \in (T_1, T_2), i = \overline{1,n},$$

$$\frac{d\overline{z}_i(t)}{dt} = A^T(t) \overline{z}_i(t), \overline{z}_i(T_1) = z_i(T_1), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n}.$$

**Теорема 53.** *Наближені гарантовані оцінки $\hat{\varphi}_i(T_2)$, $i = \overline{1,n}$, обчислюються за формулами:*

$$\hat{\varphi}_i(T_2) = (z_i(T_1),\hat{\varphi}_i(T_1)), i = \overline{1,n}, \tag{184}$$

*де $\hat{\varphi}_i(T_1)$, $i = \overline{1,n}$, знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь:*

$$\hat{\varphi}_i(t_k) + \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_r} q_{sr} b_{srik} \hat{\varphi}_s(t_r) =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_r} q_{sr} \overline{y}_{ik} b_{srik}, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,N},$$

$$b_{srik} = \int_0^{T_1} q^{-2}(t)(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t))dt, i,s = \overline{1,n}, k,r = \overline{1,N},$$

$$\tilde{g}_{ik}(t) = \chi_{(0,t_k)}(t) B^T(t) \times$$

$$\times \Phi^T(T_1,t) e^i, t \in (0,T_1), i = \overline{1,n}, k = \overline{1,N},$$

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1,\tau \in (0,t), \\ 0,\tau \neq (0,t), \end{cases}$$

*матриця $\Phi(t,s)$, $t \in [s,T_1)$, $s \in (0,T_2)$ є розв'язком наступної задачі Коші:*

$$\frac{d\Phi(t,s)}{dt} = A(t)\Phi(t,s), \Phi(s,s) = E, t \in [s,T_1), s \in (0,T_2)$$

*и $E$ — одинична матриця розмірності $n \times n$.*

*Доведення.* За формулою Коші для знаходження загального розв'язку системи неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з (173) отримаємо вираз для $\varphi(T_2; f(\cdot))$:

$$\varphi(T_2; f(\cdot)) = \varphi^1(T_2; f(\cdot)) =$$

$$= \Phi(T_2,T_1)\varphi^1(T_1; f(\cdot)) + \int_{T_1}^{T_2} \Phi(T_2,\tau)B(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= \Phi(T_2,T_1)\tilde{\varphi}(T_1; f(\cdot)) + \int_{T_1}^{T_2} \Phi(T_2,\tau)B(\tau)f(\tau)d\tau. \tag{185}$$

Помноживши ліву та праву частини (185) на вектори $e^i$, $i = \overline{1,n}$, одержимо наступні вирази:

$$(\varphi(T_2; f(\cdot)),e^i) = (\Phi(T_2,T_1)\tilde{\varphi}(T_1; f(\cdot)),e^i)+$$

$$+\left(\int_{T_1}^{T_2} \Phi(T_2,\tau)B(\tau)f(\tau)d\tau, e^i\right), i = \overline{1,n}.$$

Для останніх формул справедливе представлення:

$$(\varphi(T_2; f(\cdot)),e^i) = (z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1; f(\cdot)))+$$

$$+\int_{T_1}^{T_2} (z_i(\tau),B(\tau)f(\tau))d\tau, i = \overline{1,n}.$$

Розглянемо випадок, коли $f(\cdot) \in \overline{F}_f$. Тоді отримаємо:

$$\max_{f(\cdot)\in\overline{F}_f} (\varphi(T_2; f(\cdot)),e^i) = \max_{f(\cdot)\in\overline{F}_{1f}} (z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1; f(\cdot)))+$$

$$+\max_{f(\cdot)\in G_2} L_i(f(\cdot)), i = \overline{1,n},$$

$$\min_{f(\cdot)\in\overline{F}_f} (\varphi(T_2; f(\cdot)),e^i) = \min_{f(\cdot)\in\overline{F}_{1f}} (z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1; f(\cdot)))+$$

$$+\min_{f(\cdot)\in G_2} L_i(f(\cdot)), i=\overline{1,n}$$

тут

$$\overline{F}_{1f}=\left\{f(\cdot)\in G_1 : I_2(f(\cdot))\leq n-I_y(f\hat{(\cdot)})\right\}$$

$$L_i(f(\cdot))=\int_{T_1}^{T_2}(z_i(\tau),B(\tau)f(\tau))d\tau, i=\overline{1,n}.$$

Звідси одержимо, що виконуються співвідношення:

$$\max_{f(\cdot)\in\overline{F}_f}(\varphi(T_2;f(\cdot)),e^i)=(z_i(T_1),\hat{\varphi}(T_1))+$$

$$+\max_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),i=\overline{1,n}; \qquad (186)$$

$$\min_{f(\cdot)\in\overline{F}_f}(\varphi(T_2;f(\cdot)),e^i)=(z_i(T_1),\hat{\varphi}(T_1))+$$

$$\min_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+\min_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot))=$$

$$=(z_i(T_1),\hat{\varphi}(T_1))-\max_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))-$$

$$-\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),i=\overline{1,n}; \qquad (187)$$

де

$$\overline{F}_{2f}=\left\{v(\cdot)\in L_2(0,T_1):I_2(v(\cdot))\leq\hat{\gamma}^2-I_y(\hat{f}(\cdot))\right\}.$$

З (186) Та (187) отримаємо натупні вирази:

$$\hat{\varphi}_i(T_2)=(z_i(T_1),\hat{\varphi}_i(T_1)),i=\overline{1,n};$$

$$\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\max_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+$$

$$+\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),i=\overline{1,n}.$$

Для випадку $f(\cdot)\in\underline{F}_f$ за допомогою аналогічних міркувань отримаємо рівності:

$$\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\max_{v(\cdot)\in\underline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+$$

$$+\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),i=\overline{1,n}.$$

де

$$\underline{F}_{2f} = \left\{ v(\cdot) \in L_2(0,T_1) : I_2(v(\cdot)) \le 1 - I_y(\hat{f}(\cdot)) \right\}.$$

Оскільки $\hat{f}(t) \in Arg\min I_y(f(\cdot))$, $t \in (0,T_1)$, то справедливі представлення:

$$\frac{1}{2}(I_y^{'}(\hat{f}(\cdot)),v(\cdot)) = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\overline{y}_{ik} - \tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\overline{\varphi}_i(t_k;v(\cdot)) +$$

$$+\int_0^{T_1} q^2(\tau)(\hat{f}(\tau),v(\tau))d\tau = 0, \forall v(\cdot) \in L_2(0,T_1), \tag{188}$$

де $I_y^{'}(\hat{f}(\cdot))$ — перша похідна Фреше $I_y(f(\cdot))$ в точці $\hat{f}(\cdot)$.

Зауважимо, що також виконуються співвідношення:

$$\overline{\varphi}_i(t_k;f(\cdot)) = (\overline{\varphi}(t_k;f(\cdot)),e^i)$$

$$= \int_0^{T_1} (\chi_{(0,t_k)}(\tau)\Phi(T_1,\tau)B(\tau)f(\tau),e^i)d\tau =$$

$$\int_0^{T_1} (\tilde{g}_{ik}(\tau),f(\tau))d\tau, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,N}. \tag{189}$$

У силу (189), вираз (188) набуде вигляду:

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\overline{y}_{ik} - \tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\times$$

$$\times\int_0^{T_1} (\chi_{(0,t_k)}(\tau)\Phi(T_1,\tau)B(\tau)v(\tau),e^i)d\tau +$$

$$+\int_0^{T_1} q^2(\tau)(\hat{f}(\tau),v(\tau))d\tau = 0, \forall v(\cdot) \in L_2(0,T_1). \tag{190}$$

Змінимо місцями в (190) операції сумування та інтегрування:

$$-\int_0^{T_1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\overline{y}_{ik} - \tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\times$$

$$\times(\chi_{(0,t_k)}(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(T_1,\tau)e^i, v(\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^{T_1} q^2(\tau)(\hat{f}(\tau),v(\tau))d\tau = 0, \forall v(\cdot) \in L_2(0,T_1).$$

і отримаємо рівності:

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\overline{y}_{ik}-\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\tilde{g}_{ik}(t)+$$

$$+q^2(t)\hat{f}(t)=0, t\in(0,T_1),$$

$$q^2(t)\hat{f}(t)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot))\tilde{g}_{ik}(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}\overline{y}_{ik}\tilde{g}_{ik}(t), t\in(0,T_1) \tag{191}$$

Вираз (191) можна преставити у формі:

$$(\tilde{g}_{ik}(t),\hat{f}(t))+\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r} q_{sr}q^{-2}(t)\tilde{\varphi}_s(t_r;\hat{f}(\cdot))(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t))=$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r} q_{sr}q^{-2}(t)\overline{y}_{sr}\times$$

$$\times(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t)), t\in(0,T_1), i=\overline{1,n}, k=\overline{1,N}. \tag{192}$$

Проінтегруємо обидві частини рівності (192):

$$\int_0^{T_1}(\tilde{g}_{ik}(t),\hat{f}(t))dt+$$

$$+\int_0^{T_1}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r} q_{sr}q^{-2}(t)\tilde{\varphi}_s(t_r;\hat{f}(\cdot))(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t))dt=$$

$$=\int_0^{T_1}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r} q_{sr}q^{-2}(t)\overline{y}_{sr}(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t))dt, i=\overline{1,n}, k=\overline{1,N}. \tag{193}$$

Враховуючи

$$\varphi_i(t_k;f(\cdot))=(\varphi(t_k;f(\cdot)),e^i)=$$

$$=\int_0^{T_1}(\tilde{g}_{ik}(\tau),f(\tau))d\tau, i=\overline{1,n}, k=\overline{1,N},$$

з (193) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\varphi_i(t_k;\hat{f}(\cdot))+\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r}q_{sr}b_{srik}\varphi_s(t_r;\hat{f}(\cdot))=$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r}q_{sr}\overline{y})ikb_{srik}, i=\overline{1,n}, k=\overline{1,N},$$

з якої можна знайти величини $\hat{\varphi}_i(t_k)=\varphi_i(t_k;\hat{f}(\cdot))$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,N}$ (в тому числі $\hat{\varphi}_i(T_1)=\hat{\varphi}_i(t_N)=$, $i=\overline{1,n}$ ). Теорема доведена. $\square$

**Теорема 54.** *Для гарантованих похибок $\sigma_{\varphi_i}(T_2)$, $i=\overline{1,n}$ гарантованих оцінок $\hat{\varphi}_i(T_2)$, $i=\overline{1,n}$ виконуються умови*

$$\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)\le\sigma_{\varphi_i}(T_2)\le\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2), i=\overline{1,n};$$

*величини $\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)$ та $\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)$, $i=\overline{1,n}$ можна обчислити з виразів:*

$$\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\left[(\alpha_i(t),B^T(t)\overline{z}_i(t))\big|_{L_2(0,T_1)}(1-I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\max_{f(\cdot)}L_i(f(\cdot)), i=\overline{1,n},$$

$$\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\left[(\alpha_i(t),B^T(t)\overline{z}_i(t))\big|_{L_2(0,T_1)}(\hat{\gamma}^2-I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\max_{f(\cdot)}L_i(f(\cdot)), i=\overline{1,n},$$

*де $(\alpha_i(t),B^T(t)\overline{z}_i(t))\big|_{L_2(0,T_1)}$ — скалярний добуток у $L_2(0,T_1)$, а $\alpha_i(t)\in L_2(0,T_1)$, $i=\overline{1,n}$ — розв'язок системи функціональних рівнянь:*

$$q^2(t)\alpha_j(t)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))\tilde{g}_{ik}(t)=$$

$$=B^T(t)\overline{z}_j(t), t\in(0,T_1), j=\overline{1,n};$$

*величини $\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))$, $i,j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,N}$ знаходяться з системи алгебраісних лінійних рівнянь:*

$$\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))+\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r}q_{sr}\overline{\varphi}_s(t_r;\alpha_j(\cdot))b_{srik}=$$

$$=\int_0^{T_1}(B^T(t)\overline{z}_j(t),\tilde{g}_{ik}(t))dt, i,j=\overline{1,n}, k=\overline{1,N}.$$

*Доведення.* Розглянемо спочатку випадок, коли $v(\cdot) \in \overline{F}_{2f}$. Для величин $(z_i(T_1),\overline{\varphi}(T_1;v(\cdot)))$, $i=\overline{1,n}$, одержимо рівності:

$$(z_i(T_1),\overline{\varphi}(T_1;v(\cdot))) = \int_0^{T_1} (\overline{z}_i(t),B(t)v(t))dt =$$

$$= \int_0^{T_1} (B^T(t)\overline{z}_i(t),v(t))dt, i=\overline{1,n}.$$

Оскільки оператор $I''_y(\hat{f}(\cdot))$ — додатньо визначений та обмежений, то для нього існує обернений оператор. Тоді в силу загальної нерівності Коші-Буняковського справедливі нерівності:

$$\left|\int_0^{T_1} (B^T(t)\overline{z}_i(t),v(t))dt\right| \leq$$

$$\leq \left[\left(\left(\frac{1}{2}I''_y(\hat{f}(\cdot))\right)^{-1} B^T(t)\overline{z}_i(t),B^T(t)\overline{z}_i(t)\right)\Big|_{L_2(0,T_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times[(\hat{\gamma}^2 - I_y(\hat{f}(\cdot)))]^{\frac{1}{2}}, i=\overline{1,n}.$$

Тоді отримаємо представлення для $\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)$, $i=\overline{1,n}$:

$$\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2) = \left[(\alpha_i(t),B^T(t)\overline{z}_i(t))\big|_{L_2(0,T_1)} (\hat{\gamma}^2 - I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \max_{f(\cdot)\in G_2} L_i(f(\cdot)), i=\overline{1,n},$$

де

$$\alpha_i(t) = \left(\frac{1}{2}I''_y(\hat{f}(\cdot))\right)^{-1} B^T(t)\overline{z}_i(t), i=\overline{1,n}. \qquad (194)$$

За допомогою аналогічних міркувань отримамо вирази для $\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)$, $i=\overline{1,n}$, при $v(\cdot) \in \underline{F}_{2f}$:

$$\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2) = \left[(\alpha_i(t),B^T(t)\overline{z}_i(t))\big|_{L_2(0,T_1)} (1 - I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \max_{f(\cdot)\in G_2} L_i(f(\cdot)), i=\overline{1,n}.$$

З (194) одержимо, що вектор-функції $\alpha_i(t)$, $t \in (0,T_1)$, $i = \overline{1,n}$, задовільняють також систему функціональних рівнянь:

$$\frac{1}{2} I_y''(\hat{f}(\cdot))\alpha_i(t) = B^T(t)\overline{z}_i(t), t \in (0,T_1), i = \overline{1,n},$$

або

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik} \overline{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot)) \overline{\varphi}_i(t_k; v(\cdot)) +$$

$$+ \int_0^{T_1} (q^2(\tau)\alpha_j(\tau), v(\tau)) d\tau = \int_0^{T_1} (B^T(\tau)\overline{z}_j(\tau), v(\tau)) d\tau, \tag{195}$$

при $\forall v(t) \in L_2(0,T_1), t \in (0,T_1), j = \overline{1,n}$.

У силу (189) вирази (195) набудуть вигляду:

$$\int_0^{T_1} (q^2(\tau)\alpha_j(\tau), v(\tau)) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik} \overline{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot)) \int_0^{T_1} \tilde{g}_{ik}(\tau), v(\tau)) d\tau =$$

$$= \int_0^{T_1} (B^T(\tau)\overline{z}_j(\tau), v(\tau)) d\tau, \forall v(t) \in L_2(0,T_1), t \in (0,T_1), j = \overline{1,n}.$$

Тоді для вектор-функцій $\alpha_j(t)$, $t \in (0,T_1)$, $j = \overline{1,n}$, справедливі рівності:

$$q^2(t)\alpha_j(t) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik} \overline{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot)) \tilde{g}_{ik}(t) =$$

$$= B^T(t)\overline{z}_j(t), t \in (0,T_1), j = \overline{1,n}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j(t) = q^{-2}(t) B^T(t) \overline{z}_j(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q^{-2}(t) q_{ik} \overline{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot)) \tilde{g}_{ik}(t), t \in (0,T_1), j = \overline{1,n}. \tag{196}$$

Оскільки

$$\overline{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot)) = \int_0^{T_1} (\tilde{g}_{ik}(\tau), \alpha_j(\tau)) d\tau, i,j = \overline{1,n}, k = \overline{1,N}$$

то для знаходження величин $\overline{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot))$; $i,j = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,N}$, помножимо скалярно ліву та праву частини (196) на $\tilde{g}_{ik}(t)$;

$t \in (0,T_1)$; $j = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,N}$ та проінтегруємо отримані вирази. Таким чином $\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))$; $i,j = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,N}$ можна знайти з системи алгебраїчних лінійних рівнянь:

$$\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot)) + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r} q_{sr}\overline{\varphi}_s(t_r;\alpha_j(\cdot))b_{srik} =$$

$$= \int_0^{T_1} (B^T(t)\overline{z}_j(t),\tilde{g}_{ik}(t))dt, i,j = \overline{1,n}, k = \overline{1,N}.$$

Теорему доведено. □

*Наслідок* 16. Для компонент вектора гарантованої прогнозної оцінки $\hat{x}(T_2)$ в силу (174), (184) та монотонного зростання функції гіперболічного косинуса справедливі оцінки:

$$\exp(\hat{\varphi}_i(T_2))ch\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2) \leq \hat{x}_i(T_2) \leq$$

$$\leq \exp(\hat{\varphi}_i(T_2))ch\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2), i = \overline{1,n}. \quad (197)$$

*Наслідок* 17. Для гарантованої похибки $\sigma$ прогнозної оцінки $\hat{x}(T_2)$ в силу монотоного зростання функції гіперболічного сінусу справедливі нерівності:

$$\sum_{i=1}^{n} \exp(\hat{\varphi}_i(T_2))sh\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)\beta_i \leq \sigma \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \exp(\hat{\varphi}_i(T_2))sh\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)\beta_i. \quad (198)$$

У другій частині запропоновано алгоритми побудови оцінок параметрів систем різницевих та диференціальних рівнянь на основі спостережень для моделей популяційної динаміки.

Також для випадку поширення інформаційних повідомлень з двох джерел побудовано алгоритми оцінки впливів для моделей поширення інформації з врахуванням того, яка інформація про предметну область є відомою.

Для окремого випадку моделей популяційної динаміки наведено алгоритми знаходження гарантованих прогнозних оцінок. Аналогіні результати наведені для систем диференціальних рівнянь із динамікою Гомпертца.

# ВИСНОВКИ

У роботі досліджено моделі популяційної динаміки, що представлені у формі систем нелінійних диференціальних рівнянь. Також було розглянуто моделі з спеціальним вибором зовнішніх впливів, зокрема, системи рівнянь з динамікою Гомперца та системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Доведено твердження про обмеженість та додатність розв'язків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процеси поширення інформації, а для окремих випадків базової моделі виведено точні розв'язки. Знайдено наближені розв'язки за допомогою методу малого параметру для особливого випадку базової моделі. Отримано прогнозні оцінки динаміки моделей поширення інформації із спеціальним поданням зовнішнього впливу. Розроблено методики оцінювання параметрів для популяційних моделей, що подаються у вигляді систем диференціальних або різницевих рівнянь. Сформульовано та доведено теореми, на основі яких можна обчислити оптимальні оцінки впливів для випадку поширення інформаційних повідомлень з двох джерел. Набула подальшого розвитку теорія стійкості динамічних систем: встановлено умови стійкості розв'язків за першим наближенням в околі особливих точок для математичних моделей популяційної динаміки, поданих у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь з стаціонарними параметрами та систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто із нестаціонарними параметрами та збурюючим впливом.

Результати дослідження можна застосувати для реальних популяційних процесів з метою їх оптимізації.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


[1] Бреер В.А. Стохастические модели социальных сетей. *Управление большими системами.* 2009. №27. С. 169—204.

[2] Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модели влияния в социальных сетях. *Управление большими системами.* 2009. №27. С. 205—281.

[3] Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях. *Проблемы управления.* 2009. №5. С. 28—35.

[4] Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления, противоборства. Москва: Физматлит, 2010. 228 с.

[5] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 416 с.

[6] Экланд Н., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. Москва: Мир, 1979. 400 с.

[7] Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. Москва: Мир, 1973. 324 с.

[8] Щепкин А.В. Деловые имитационные игры в организации и управлении. Воронеж: ВГАСУ, 2001. 384 с.

[9] Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. Москва: ЗАО "ПМСОФТ 2004. 227 с.

[10] Chen X., Jiang N., Jing Y., Stojanovski G., Dimirovski G. Differential Game Model and Its Solutions for Force Resourse Complementary via Lanchester Square Law Equation. *International Federation of Automatic Control* : preprints of XVIII world congress, Milano, Italy, August 28 — September 2 2011. Milano, 2011. P. 14229—14223.

[11] Novikov D.A. Hierarchical Models of Warfare. *Automation and Remote Control.* 2013. №10. P. 1733 — 1752.

[12] Власенко Л.А., Чикрий А.А. Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами. *Труды института математики и механики УрО РАН.* 2014. №4. С. 71—80.

[13] Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Труды института математики и механики УрО РАН.* 2017. №1. С. 293—305.

[14] Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Москва: Мир, 1971. 382 с.

[15] Wolfram S. Theory and Applications of Cellular Automats. Singapore: World Scientific, 1986. 363 p.

[16] Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1999. 116 с.

[17] Cederman L.E. Agent-Based Modeling in Political Science. *Political Methodologist.* 2001. №10. P. 16—22.

[18] Tsvetovat M., Carley K. M. Modeling Complex Socio-technical Systems using Multi-Agent Simulation Method. *Künstliche Intelligenz.* 2004. №2. P. 23—28.

[19] Frantz T., Carley K.M. A formal characterization of cellular networks. *CMU-ISRI-05-109*: Technical Report, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, September 2005. Pittsburgh, 2005. 14 p.

[20] Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н. Базисные понятия моделирования информационного управления в социальных системах. *Теория активных систем*: труды международной научно-практической конференции, Москва, Российская Федерация, 19-21 ноября 2001. Москва, 2001. Т. 2. С. 125—129.

[21] Фурашев В.Н., Ланде Д.В., Брайчевский С.М. Моделирование информационно-электоральных процессов. Киев.: ЦПИ АроН Украины, 2007. 182 с.

[22] Горбулін В.П., Додонов О.Г., Ланде Д.В. Інформаційні операції та безпека суспільства: загрози, протидія, моделювання. Київ: Інтертехнологія, 2009. 164 с.

[23] Івохін Є.В., Апанасенко Д.В., Науменко Ю.О. Моделювання процесі розповсюдження інформації з урахуванням соціального впливу. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXIX International conference, Mukachevo, Ukraine, May 10-13, 2017. Kyiv, 2017. P.157.

[24] Ivohin E.V., Apanasenko D.V., Naumenko Yu.O. Mathematical models of information spreading process with regards to social influence. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXX International conference, Vilnius, Lithuania, August 14-19, 2017. Kyiv, 2017. P. 65.

[25] Івохін Є.В., Апанасенко Д.В., Науменко Ю.О. Про підходи до моделювання розповсюдження реклами як агрегації, обмеженої дифузією. *Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи)*: тези міжнародної науково-практичної конференції, Київ, Україна, 16-18 травня 2017. Київ, 2017. С. 116—117.

[26] Івохін Є.В., Апанасенко Д.В., Науменко Ю.О. Про один підхід до моделювання розповсюдження рекламної інформації як дифузійного процесу. *Інформаційні технології в освіті, науці і виробництві*: тези міжнародної науково-практичної конференції, Луцьк, Україна, 25-27 травня 2017. Луцьк, 2017. С. 161—164.

[27] Івохін Є.В., Науменко Ю.О. Про окремі математичні моделі процесу розповсюдження реклами в соціумі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки.* 2017. №1 С. 39—43.

[28] Арнольд В.И. "Жесткие"и "мягкие"математические модели. Москва: Издательство МЦНМО, 2004. 32 с.

[29] Mishra B. K., Prajapati A. Modelling and simulation: cyber war. *Procedia Technology*. 2013. № 10. P. 987–997.

[30] Chilachava T., Kereselidze N. Non-preventive continuous linear mathematical model of information warfare. *Sokhumi State University, Proceedings, Mathematics and Computer Sciences series*. 2009. №7. P. 91—112.

[31] Chilachava T., Kereselidze N. Continuous linear mathematical model of preventive information warfare. *Sokhumi State University, Proceedings, Mathematics and Computer Sciences series*. 2009. №7. P. 113—141.

[32] Чилачава Т., Кереселидзе Н. Математическое моделирование информационной войны. *ГЭНЖ: компьютерные науки и телекоммуникации*. 2010. №1(24). С. 78—105.

[33] Kereselidze N. About relations of levels of information technology sides in one of the mathematical model information warfare. *Conferece of Georgian Mathematical Union*: abstracts of IV International conference, Tbilisi-Batumi, Georgia, September 9-15, 2013. Tbiliisi, 2010. №1 (24). P. 168—169.

[34] Чилачава Т.И., Кереселидзе Н.Г. Математическое моделирование информационных войн. *Информационные войны*. 2011. №1(17). С.28—35.

[35] Chilachava T. About new mathematical model "beast-predator-victim". *Conference of the Georgian Mathematical Union* : abstracts of III International conference, Batumi, Georgia, September 2-9, 2012. Batumi, 2012. P.158.

[36] Chilachava T., Kereselidze N. Optimizing problem of mathematical model of preventive information warfare. *Informational and Communication Technologies (ICTMC-2012)*: abstracts of International Scientific conference, Sukhumi, Georgia, October 30, 2012. Sukhumi,2012. P.525-529.

[37] Кереселидзе Н.Г. О соотношениях уровней информационных технологии сторон в обобщенной математической модели информационной войны игнорирования противника. *Проблемы управления безопастностью сложных систем*: сборник статей XXI международной конференции, Москва,

Российская Федерация, 18 декабря, 2013 . Москва, 2013. С.173—175.

[38] Чилачава Т.И. Линейная дискретная математическая модель информационной войны с участием авторитетных общественных институтов. *Проблемы управления безопастностью сложных систем*: сборник статей XXII международной конференции, Москва, Российская Федерация, 3 декабря, 2014. Москва, 2014. С.77—79.

[39] Чилачава Т.И. Линейная непрерывная математическая модель информационной войны с участием авторитетных религиозных институтов. *Проблемы управления безопастностью сложных систем*: сборник статей XXII международной конференции , Москва, Российская Федерация, 3 декабря, 2014. Москва, 2014. С.298—302.

[40] Chilachava T., Chakhvadze A. Continuous nonlinear mathematical and computer model of information warfare with participation of authoritative interstate institutes. *Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications.* 2014. № 4(44). P. 53—74.

[41] Кереселидзе Н.Г. О существовании решения в математической модели информационной войны // *Проблемы управления безопастностью сложных систем*:сборник статей XXII международной конференции, Москва, Российская Федерация, 3 декабря, 2014. Москва, 2014. С.46—49.

[42] Кереселидзе Н.Г. Математические и компьютерные модели типа Чилкер в информационной войне. *Информационные войны.* 2016. №2 (38). С.18—25.

[43] Kereselidze N. G. An optimal control problem in mathematical and computer models of the information warfare. *Differential and Difference Equations with Applications: ICDDEA, Amadora, Portugal, May 2015, Selected Contributions. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 164, Springer International Publishing Switzerland.* 2016. P. 303–311.

[44] Измоденова К.В., Михайлов А. П. Об оптимальном управлении процессом распространения информации. *Математическое моделирование.* 2005. №5 (17). С. 67—76.

[45] Михайлов А. П., Маревцева Н.А. Модели информационной борьбы. *Математическое моделирование.* 2011. №10 (23). С. 19—32.

[46] Mikhailov A. P., Marevtseva N. A. Models of Information Warfare. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2012. Vol. 4, № 3. P. 251—259.

[47] Михайлов А. П., Петров А. П., Маревцева Н. А., Третьякова И. В. Развитие модели распространения информации в социуме. *Математическое моделирование.* 2014. №3 (26). С. 65—74.

[48] Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A. Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society. *Mediterranean Journal of Social Sciences.* 2015. Vol. 6, № 5. P. 27—35.

[49] Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О.Г., Маревцева Н. А. Математическое моделирование информационного противоборства в социуме. *Международный экономический симпозиум - 2015*: материалы международных научных конференций, посвященных 75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, сборник статей, Санкт-Петербург, Российская Федерация. 22-25 апреля 2015 г. Санкт-Петербург, 2015. С. 293—303.

[50] Михайлов А. П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиции индивидами при информационном противоборстве в социуме. *Математическое моделирование.* 2015. №12 (27). С. 137—148.

[51] Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О.Г. Математическое моделирование информационного противоборства в эпоху Интернета. *Научный сервис в сети Интернет*: труды XVIII Всероссийской научной конференции, Новороссийск, Российская Федерация, 19-24 сентября 2016. Новороссийск, 2016. С. 264—270.

[52] Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О.Г., Маревцева Н. А. Модель информационного противоборства в социуме при периодическом дестабилизирующем воздействии. *Математическое моделирование.* 2017. №2 (29). С. 23—32.

[53] Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О.Г. Модель информационного противоборства в социуме с кусочно-постоянной функцией дестабилизирующего воздействия. *Математическое моделирование.* 2018. №7 (30). С. 47—60.

[54] Наконечний О. Г., Зінько П. М. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2015. №3(120). С.50—60.

[55] Michel Y., Smith H., Wang L. Global dynamics of SEIR epidemic model with vertical transmission. *SIAM Journal Applies Mathematics.* 2001. №1 (62). P. 58—69.

[56] Pastor-Satorras R., Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks. *Physics Review Letters, april 2001.* 2001. Vol. 86. №14. P. 3200—3203.

[57] Liu Y., Zhang L., Gao . An improved method to an impulsive and delayed discretized model. *Applied Mathematics.* 2006. № 7. P. 108—123.

[58] Mishra B. K., Saini D.K. SEIRS epidemic model with delay for transmission of malicious objects in cumputer network. *Applies Mathematics and Computation.* 2007. № 188. P. 1476—1482.

[59] Mishra B. K., Singh A.K. SIjRS epidemic model with multiple groups of infection in cumputer network. *International Journal of Nonlinear Science.* 2012. № 3. P. 357—362.

[60] Vynnycky E., White R.G. An Introduction to Infectious Disease Modelling. Oxford: Oxford University Press, 2010. 368 p.

[61] Хусаїнов Д.Я. Аналіз моделі розповсюдження захворювання. *Problems of Dicision Making under Uncertainties (PDMU-2013)*: тези XXII міжнародної конференції, Ялта-Форос, Україна, 23-27 вересня 2013. Київ, 2013. С. 138.

[62] Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K. Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation.* 2014. №236. P. 184—194.

[63] Хусаїнов Д.Я., Шатирко А.В. Аналіз однієї епідеміологічної моделі з післядією. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кібернетика.* 2017. В. 1. С. 36—44.

[64] Miller J.C. Mathematical models of SIR disease spread with combined non-sexual and sexual transmission routes. *Infectious Disease Modelling.* 2017. №2. P. 35—55.

[65] Лановенко О.Г., Остапішина О.О. Словник-довідник з екології: навч.-метод. посіб. Херсон : ПП Вишемирський В.С., 2013. 226 с.

[66] Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математичні моделі розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2016. №3. С.98 — 105.

[67] Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Усередненні прогнозні оцінки в моделях поширення інформації при невизначеностях. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2017. №2. С.122 — 127.

[68] Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації при невизначеностях. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2017. №4. С.56 — 65.

[69] Nakonechnyi O.G., Shevchuk I.M. Stability under stochastic perturbation of solutions of mathematical models of information spreading process with external control. *Mathematical modeling and computing.* 2018. №1. P.67 — 73.

[70] Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М., Чикрій В.К. Оцінка нестаціонарних параметрів диференціальних рівнянь в

умовах невизначеності. *Кібернетика і системний аналіз.* 2018. №4. С.109 — 121.

[71] Deichman S. A Lanchester Model of Guerrilla Warfare. *Operational Research.* 1962. №10. P. 818—827.

[72] Саати Т.Л. Математические модели конфкликтных ситуаций. Москва: Советское радио, 1977. 300 с.

[73] Ткаченко П.М. Математические модели боевых действий. Москва: Советское радио, 1969. 240 с.

[74] Аджубей Л.А., Івохін Є.В. Про деякі математичні моделі формалізації соціоінформаційних потоків. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки.* 2017. №2 С. 70—73.

[75] Івохін Є.В. Математичні моделі процесу розповсюдження реклами в соціальній групі. *Вісник Вінницького політехнічного інституту.* 2017. №6 С. 122—127.

[76] Ivokhin E.V., Naumenko Yu.O. On an Approach to Construction of Structured Fuzzy Sets and their Application for Description of Fuzzy Time Response. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. №7 P. 79—86.

[77] Bellman R. On the boundedness of solutions of nonlinear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1947. №62. P. 357—386.

[78] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва: ИЛ, 1954. 216 с.

[79] Олехник С. Н. Об ограниченности и неограниченности решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. *Дифференциальные уравнения.* 1972. Т8 №9. С. 1701—1704.

[80] Леваков А. А., Шпигельман Э. С. Об ограниченности бесконечно продолжимых решений системы двух уравнений с квадратичными правыми частями и множестве характеристических показателей Ляпунова решений этой

системы. *Дифференциальные уравнения.* 1972. Т. 8, №11. С. 1969—1976.

[81] Bing-ten Zhang (Ping-Ken Chang). Boundedness of solutions of ordinary differential equations of the second order. *Chinese Mathematics.* 1964. Vol. 5, No. 1. P. 139-148.

[82] Martynyuk A.A. Novel bounds for solutions of nonlinear differential euqations. *Applied Mathematics.* 2016. №6. P. 182—194.

[83] Хусаїнов Д.Я., Шатирко А.В. Основи нелінійної динаміки. Київ: ВПЦ "Київський університет 2017. 160 с.

[84] Тихонов А. Н. Методы малого параметра и их применение. *Дифференциальные уравнения.* 1985. Т. 21, №10. С. 1659—1661.

[85] Musafirov E.V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameters. *Indian Journal of Mathematics.* 2008. Vol. 50 № 1. P. 63—74.

[86] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Москва: Физматгиз, 1959. 471 с.

[87] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: Физматгиз, 1959. 211 с.

[88] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. 3-е изд. Москва: Наука, 1965. 207 с.

[89] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва: Наука, 1967. 472 с.

[90] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва: Наука, 1981. 400 с.

[91] Винберг Э. Курс Алгебры. Москва: Издательство МЦНМО, 2014. 591 с.

[92] Гихман И.И., Дороговцев А.Я. Об устойчивости решений стохастичеких дифференциальных уравнений. *Украинский математический журнал. Институт математики.* 1965. Т. XVII №6. С. 3—21.

[93] Нікітін А.В. Стійкість у середньоквадратичному стохастичних диференціальних рівнянб Іто-Скорохода у гільбертовому просторі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2007. №3. С.101—104.

[94] Yatsenko V. O., Makarychev M.V. Adaptive control of Lyapunov exponents. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.* 2014. №1 (14). С.59—63.

[95] Гаращенко Ф.Г. Аналіз практичної стійкості та чутливості лінійних динамічних систем зі зміною вимірності фазового простору. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2016. №3. С.76—90.

[96] Хусаїнов Д.Я., Петрович В.М. Оптимізація деяких характеристик стійкості стохастичних систем// *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXIX International conference, Mukachevo, Ukraine, May 10-13, 2017. Kyv, 2017. P.191.

[97] Shevchuk. I.M. Non-stationary models of population dynamics in information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2016)* : abstracts of XXVII International Conference, Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27 2016. Kyiv, 2016. P.147 — 148.

[98] Shevchuk. I.M. Stability of solutions of mathematical models of information spreading process with external control. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXIX International Conference, Mukachevo, Ukraine, May 10-13 2017. Kyiv, 2017. P.112.

[99] Шевчук Ю.М. Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами. *Dynamical system modeling and stability investigation*: abstracts of XVIII International Conference, Kiev, Ukraine, May 24-26 2017. Kyiv, 2017. P.102.

[100] Шевчук Ю.М. Стійкість розв'язків у математичних моделях розповсюдження інформації з зовнішніми впливами. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2017. №1. С.99 — 111.

[101] Шевчук Ю.М. Моделі розповсюдження інформації з малим параметром. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2017. №1. С.80 — 87.

[102] Бакан Г.М. Эллипсоидальные алгоритмы гарантированого оценивания и рекуррентный метод наименьших квадратов в задачах фыльтрации состояний динамических систем. *Проблемы управления и информатики.* 1997. №3. С. 34—48.

[103] Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 264 с.

[104] Gubarev V.F. Method of iterative identification of multidimensional systems by uncertain data. Part I. Theoretical aspects. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2006. Vol. 38, №9. P. 12—28.

[105] Gubarev V.F., Shevchenko V.N., Gummel A.V. State estimation for systems subjected to bounded uncertainty using moving horizon approach. *IFAC Proceedings Volumes.* 2009. Vol. 42, №10. P. 910–915.

[106] Губарев В.Ф., Дарьин А.Н., Лысюченко И.А. Нелинейный оцениватель состояния по заданным на скользящем интервале и возможность его применения в задаче ориентации космического аппарата. *Проблемы управления и информатики.* 2011. №1. С. 118—132.

[107] Nakonechnyi O.G. Beast-mean estimates in model of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES*: abstracts of XXIV International Conference, Cesky Rudolec, Czech Republic, September 1-5 2014. Kyiv, 2014. P.114—115.

[108] Martynyuk A.A., Khusainov D. Ya., Chernienko V.A. Integral estimates of solutions to nonlinear systems and their applications. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 2016. №1. P.1—11.

[109] Наконечний О.Г. Задачі гарантованого оцінювання параметрів в динаміці. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES* : тези XVII міжнародної

конференції, Східниця, Україна, 23-27 травня 2011. Київ, 2011. P.141.

[110] Наконечний О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності. *Наукові записки Київського національного університету, факультет кібернетики.* 2004. Т.VII. С. 102—111.

[111] Ramsay J. O. Hooker G., Campbell D., Cao J. Parameter estimation for differential equations: a generalized smoothing approach. *Royal Statistic Society.* 2007. Vol. 69, №5. P. 741—796.

[112] Aster R.C., Borchers B., Thurber C.H. Parameter estimation and inverse problems: eBook. Academic Press, 2013. P. 376.

[113] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M. Estimation of unsteady parameters in model of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES*: abstracts of XXVIII International Conference , Brno, Czech Republic, August 25-30 2016. Kyiv, 2016. P.82—83.

[114] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Guaranteed predictive estimation in models of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXX International Conference, Vilnius, Lithuania, August 14-19 2017. Kyiv, 2017. P.91 — 92.

[115] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimate of parameters of difference equations under uncertainty. *Ukrainian conference on applied mathematics*: abstracts of conference, Lviv, Ukraine , September 28-30 2017. Lviv, 2017. P.86.

[116] Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Аналіз нестаціонарних математичних моделей поширення інформації в умовах невизначеності. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*: тези міжнародної наукової конференції, м. Рівне, Україна, 2-4 березня 2018. Рівне, 2018. С.182 — 184.

[117] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Optimal estimation of non-stationary parameters of difference equations. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER*

*UNCERTAINTIES (PDMU-2018)*: abstracts of XXXI International Conference, Lankaran-Baru, Respublic of Azerbaijan, July 3-8 2018. Kyiv, 2018. P.96 — 97.

[118] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimation of influence for models of information spreading process under uncertainty. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXXII International Conference, Prague, Czech Rebublic, August 27-31 2018. Kyiv, 2018. P.93 — 94.

[119] Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Керування процесами протидії в моделях поширення інформації. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: тези XXIV Всеукраїнської наукової конференції, м. Львів, Україна, 26-28 вересня 2018. Львів, 2018. С.109.

[120] Wilson A.J. Volume of n-dimensional ellipsoid. *Sciencia Acta Xaveriana.* 2014. Vol.1, № 1. P. 101—106.

[121] Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. Киев: УМК ВО, 1988. 157 с.

**Відомості про авторів**

Наконечний Олександр Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Шевчук Юлія Михайлівна (контактна особа), кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Моб. тел. 099-252-93-73

Пошта nysya00@gmail.com