МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Г. О. Доленко

Прикладні проблеми теорії прийняття рішень

Навчальний посібник

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ
2023

УДК 519.8+519.6(075.8)
Д64

Рецензенти:
д-р техн. наук, проф. *В. Заславський*
д-р фіз.-мат. наук., проф. *Д. Хусаінов*

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 10 від 25 квітня 2023 року)

Ухвалено науково-методичною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 5-23 від 8 червня 2023 року)

Доленко Г. О.
Д64 Прикладні проблеми теорії прийняття рішень : навч. посіб. / Г. О. Доленко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2023. – 95 с.

Розглянуто теоретичні та практичні знання з основ системної оптимізації. Вони застосовані для прикладних проблем прийняття рішень при управлінні змінами й розвитком систем.

Для студентів факультету комп'ютерних наук і кібернетики, які навчаються за спеціальностями "Системний аналіз", "Прикладна математика", "Комп'ютерні науки".

УДК 519.8+519.6(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Посібник містить три розділи. У першому розглядається методологія прийняття рішень на основі системної оптимізації. У другому – алгоритми прийняття рішень на основі системної оптимізації для різних способів задання цільових установок у лінійних задачах. Проаналізовано приклад розв`язання однієї задачі з комплексу прийняття рішень для зарядної інфраструктури електромобілів. У третьому розділі подано дві прикладні задачі формування цільових установок у соціально-економічних питаннях.

Працю рекомендовано для студентів, що навчаються за спеціальностями "Системний аналіз", "Прикладна математика", "Комп'ютерні науки".

Неперервні й суттєві зміни в технологіях, політиці, ринках збуту, потребах клієнтів стали звичайним явищем. Міжнародний стандарт ІРО 9000:2000 визначає організацію (організаційну систему, оргсистему) як групу робітників і необхідних засобів з розподіленням відповідальності, повноважень та взаємовідношень. Організаційна система – це комплекс взаємопов'язаних елементів, процесів і структур, які використовуються для досягнення цілей та забезпечення її ефективного функціонування. Вона містить формальні й неформальні правила, процедури, комунікаційні канали, а також ресурси, які використовуються для координації діяльності людей. Прикладами організаційної системи є підприємства, корпорації, регіони, галузі, держави. Організаціям, що бажають вижити та зберегти конкурентоздатність, необхідно безперервно модернізувати управління діяльністю, перебудовувати свою стратегію та структуру, узгоджувати різні невідповідності в зовнішньому та внутрішньому середовищах.

Відповідно, *особам, які приймають рішення* (далі – ОПР) на підприємстві, регіоні, у певній галузі, на державному рівні та розробникам корпоративних систем управління, які підтримують функціонування й розвиток організації, необхідний математичний апарат, що адекватно описує відповідні зміни та цілеспрямовано здійснює їх.

Традиційно в автоматизованих системах управління використовується апарат дослідження операцій. Але класична постановка оптимізаційних задач для більшості сучасних практичних завдань прийняття рішень при управлінні розвитком не є вичерпною через те, що допустима область і критерії можуть змінюватись у процесі оптимізації. Більше того, основна змістовна суть процесу оптимізації для класу задач, що пов'язані з розвитком великих організаційних систем, і полягає у їхній цілеспрямованій зміні відповідно до визначеної *цільової установки* (далі – ЦУ). Оскільки управління системою, проєктування приладу, планування діяльності та взагалі процес прийняття рішень обумовлює, як правило, досягнення деякої цільової установки або послідовне наближення до деякого бажаного стану чи поведінки, тому терміни "управління", "планування", "проєктування", "рішення", як правило, поєднуються зі словом "цілеспрямоване".

У практичних задачах управління змінами (управління розвитком) можуть виникати різні неузгодження. З одного боку – організаційна система, що досліджується, з другого – як правило, несумісні з нею цільові установки. Залежно від ситуації та постановки задачі управління цільові установки визначають кількісно задані цілі розвитку або бажаний для ОПР стан системи, що розглядається, чи вимоги зовнішнього середовища, або інтереси інших систем.

Підхід до управління розвитком на основі цілеспрямованої зміни системи відповідно до визначеної ЦУ був запропонований у роботі В. М. Глушкова "О системній оптимізації" та названий системною оптимізацією.

Ідеї системної оптимізації реалізовані при рішенні багатьох практичних задач. Зазначимо деякі застосування технології системної оптимізації:

- при комплексному аналізі та цілеспрямованому формуванні умов розвитку оргсистеми, створенні комп'ютерної багаторівневої розподіленої системи підтримки прийняття рішень для розроблення енергетичної програми країни з узагальненням на всі галузі;

- при створенні систем підтримки прийняття узгоджених рішень;
- при стратегічному плануванні й антикризовому управлінні підприємствами;
- при розподіленому управлінні розвитком закладу вищої освіти та системи вищої освіти України та Німеччини.

1. МЕТОДОЛОГІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ СИСТЕМНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1. Умови виникнення задачі системної оптимізації

Розглянемо модель організаційної системи й модель цільових установок.

Нехай модель досліджуваної організаційної системи задана у вигляді області допустимих розв'язків

$$D_0 = \left\{ \begin{matrix} x: \ g_l \ (x) \le 0, l \in Q = \{1,...,m\}, \\ x = \{x_j, \ j \in J = \{1,...,n\}\} \end{matrix} \right\} \tag{1.1}$$

та множини критеріїв

$$f = \left\{ \begin{matrix} f_i(x) \to \max, i \in I_1, \ f_i(x) \to \min, \\ i \in I_2, I_1 \cup I_2 = I = \{1,...,M\} \end{matrix} \right\}, \tag{1.2}$$

де x – вектор розв'язків розмірності n, m – кількість обмежень, M – кількість критеріїв, I_1 – множина індексів критеріїв, що максимізуються, I_2 – множина індексів критеріїв, що мінімізуються.

Зауваження. Модель оргсистеми може бути визначена $\{D_0, f\}$, або тільки множиною допустимих розв'язків $\{D_0\}$ без урахування критеріїв f. Це характерно для ситуацій управління, в яких не беруться до уваги інтереси розглядуваної системи в досягненні найкращих значень власних критеріїв.

Позначимо через G модель цільових установок. Існують різні способи її формування. Вона може бути задана безпосередньо через фіксовані бажані значення критеріїв $f^* = \{ f_i(x), i \in I_1 \}$:

$$G = \left\{ x: f^*_i \le f_i(x), i \in I_1, \ f^*_i \ge f_i(x), i \in I_2, x_j \ge 0, \ j \in J \right\};$$

через інтервали значень критеріїв $\left[f_{i(н)}, f_{i(в)} \right], i \in I$:

$$G = \left\{ x: f_{i(н)} \le f_i(x) \le f_{i(в)}, i \in I, x_j \ge 0, \ j \in J \right\}; \tag{1.3}$$

через бажаний розв'язок $x^* = \left\{ x^*_j,\, j \in J \right\}$;

$$G = \left\{ x : x_j = x^*_j,\, j \in J \right\};$$

через інтервали розв'язків $\left[x_{j(н)}, x_{j(в)} \right]$, $j \in J$:

$$G = \left\{ x : x_{j(н)} \le x_j \le x_{j(в)},\, j \in J \right\};$$

через деяку дискретну або неперервну множину розв'язків $\bar{X}$:

$$G = \bar{X};$$

через розв'язки інших оптимізаційних задач $\operatorname*{opt}_{x \in \bar{X}} L(x)$:

$$G = \arg \operatorname*{opt}_{x \in \bar{X}} L(x) .$$

Задача системної оптимізації виникає тільки у випадку, якщо, по-перше, модель цільових установок несумісна з моделлю системи $\left\{ D_0, f \right\}$: $G \cap D_0 = \varnothing$ (1.4), або для заданих цільовими установками значень критеріїв не існує рішення у просторі розв'язків, тобто $G = \varnothing$.

По-друге, параметри, які характеризують допустиму область D_0 і множину критеріїв f, можуть змінюватися. Але їхні варіації відіграють роль змінних тільки для "досягнення" недопустимих у D_0 бажаних для ОПР розв'язків із G.

Позначимо

$$Q_0 = \left\{ 1 : 1 \in Q, G \cap D_0 = \varnothing \right\}, Q_0 \subset Q \qquad (1.5)$$

– множину індексів обмежень у D_0, через які $G \cap D_0 = \varnothing$, $I_0 = \left\{ i : i \in I, G = \varnothing \right\}$, $I_0 \subset I$ (1.6) – множину індексів критеріїв f, через які $G = \varnothing$, Δp_l, $l \in Q_0$ – вектори варіації параметрів обмежень з індексами із множини Q_0, Δp_i, $i \in I_0$ – вектори варіації параметрів критеріїв з індексами із множини I_0, D_1 – нова область допустимих розв'язків, f_1 – нова множина критеріїв, $P_0 = \{ \Delta p_l,\, l \in Q_0,\, \Delta p_i,\, i \in I_0 \}$ – область обмежень на варіації параметрів D_0 та f з індексами із множин Q_0 та I_0, що задає ОПР на основі реальних можливостей досліджуваної системи в процесі рішення задачі.

P – область обмежень на варіації параметрів D_0 і f з індексами із множин Q_0 та I_0, яка математично забезпечує побудову D_1 таким чином, що $D_1 \cap G \neq \varnothing$, або при $G = \varnothing$ дозволяє переформування множини критеріїв f на f_1 у такий спосіб, що $G \neq \varnothing$, без урахування реальних можливостей P_0 за зміною параметрів системи.

1.2. Загальна постановка задач системної оптимізації

Задача системної оптимізації полягає в побудові нової моделі оргсистеми. Позначимо її $\{D_1, f_1\}$ шляхом зміни параметрів $\{D_0, f\}$ згідно з G у межах $P \bigcap P_0$ таким чином, щоб $D_1 \bigcap G \neq \varnothing$ (при $D_0 \bigcap G = \varnothing$ або при $G = \varnothing$) з урахуванням специфіки задачі.

Після побудови нової моделі оргсистеми $\{D_1, f_1\}$, в якій $D_1 \cap G \neq \varnothing$, необхідно знайти її розв'язок на $\{D_1, f_1\}$, який відповідає перевагам критеріїв f_1, що визначаються завданням G.

1.3. Специфічні особливості задач системної оптимізації

Специфічні особливості практичних завдань управління розвитком визначають різноманітні постановки задач системної оптимізації.

1. Модель оргсистеми може бути представлена $\{D_0, f\}$ із заданим ступенем узгодженості f та G, або тільки $\{D_0\}$ у випадку, коли її власні інтереси f не беруться до уваги.

2. Задається необхідний ступінь узгодженості D_1 та G: або має бути повна узгодженість $G \subset D_1$, або часткова $D_1 \cap G \neq \varnothing$.

3. У практичних задачах ОПР мають різні можливості з формулювання області P_0 та оптимізаційних завдань на $P \bigcap P_0$ для однозначного вибору варіацій параметрів системи.

1.4. Загальна схема розв'язання задач системної оптимізації

Загальна схема розв'язування задач системної оптимізації складається з таких основних етапів.

I. Визначають, погіршаться чи покращаться значення критеріїв f при зміні вихідної допустимої області D_0 моделі системи в напрямі множини G, яка відповідає вимогам ОПР.

Можливі три варіанти:

А. Усі розв'язки із множини G мають кращі значення за всіма критеріями порівняно з точками області D_0 (G "краще" D_0 за f).

Б. Жодна точка із заданих G не дає одночасного покращення критеріїв порівняно з точками області D_0 (G "гірше" D_0 за f).

Якщо реалізовано цей варіант і ставиться вимога тільки покращення значень за всіма критеріями при зміні допустимої області, то не має необхідності в розв'язанні задачі системної оптимізації, оскільки для будь-якої бажаної точки із G в області D_0 існуватиме розв'язок із кращими значеннями за всіма критеріями одночасно.

В. У множині G тільки частина розв'язків має кращі значення критеріїв порівняно з точками області D_0 ("змішаний" варіант).

Природно, що реалізація першого етапу здійснюється тільки у випадку, якщо модель системи (крім допустимої області D_0) містить множину критеріїв f.

II. Нехай модель цільових установок G задається безпосередньо у просторі критеріїв, наприклад через бажані величини цільових функцій f або їхні інтервали.

Визначають, чи існують узагалі розв'язки зі значеннями за всіма критеріями f кращими або рівними бажаним для ОПР, чи такі, що належать указаним ОПР інтервалам. Іншими словами з'ясовують, чи не порожня множина G. Якщо $G = \varnothing$, тоді слід формувати нову множину критеріїв f_1.

Якщо модель ЦУ задають безпосередньо у просторі розв'язків, то не має необхідності використання цього етапу.

III. Виділяють обмеження в D_0, параметри яких необхідно змінити для забезпечення допустимості вимог G у новій області D_1. Назвемо такі обмеження суттєвими. Множину їхніх індексів у (2.5) позначено через Q_0.

IV. Будують область P-варіацій параметрів суттєвих обмежень. До складу P мають входити умови на варіації параметрів, які забезпечують допустимість точок із G у новій області D_1. В області P повинні бути обмеження, які забезпечують збереження фізичної сутності умов з індексами з Q_0, а також замкненість і обмеженість нової області D_1 (уважаємо D_0 замкненою і обмеженою).

На цьому самому етапі відбувається формування області допустимих варіацій параметрів P_0 для суттєвих обмежень у D_0 на основі інформації від ОПР та експертів про можливість змін системи, що розглядається. Ці обмеження є неформалізованими при створенні вихідної моделі задачі. В областях P і P_0 також мають бути враховані ті параметри з індексами з Q/Q_0, до змін яких може приводити управління параметрами суттєвих обмежень.

V. Якщо $P \bigcap P_0 \neq \varnothing$, тоді визначають нові значення параметрів суттєвих обмежень у D_0 і пов'язаних з ними параметрів шляхом побудови і розв'язання деяких оптимізаційних задач на множині $P \bigcap P_0$. У такий спосіб формується нова область допустимих розв'язків D_1: $G \bigcap D_1 \neq \varnothing$. На D_1 визначають ефективні розв'язки за перевагами на множині критеріїв f, що відповідають моделі цільових установок G.

Відомо, що знаходження ефективних розв'язків багатокритеріальної задачі може бути здійснено методом обмежень або при використанні мінімаксної згортки.

VI. Якщо $P \bigcap P_0 = \varnothing$ і ОПР може змінити модель директив G на більш реалістичну відносно одержаної при дослідженні системи інформації, то процес рішення задачі системної оптимізації починається з початку.

При розв'язуванні задачі системної оптимізації ОПР може:

- обирати спосіб задання моделі цільових установок G і безпосереднє формування моделі;
- будувати область P_0 обмежень на варіації параметрів;
- вибирати оптимізаційну задачу для однозначного визначення варіацій параметрів суттєвих обмежень.

Три таких неформалізованих моменти наявні в кожній схемі розв'язування задачі системної оптимізації.

2. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ СИСТЕМНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

2.1. Постановка багатокритерійних лінійних задач системної оптимізації

Нехай задана множина допустимих розв'язків D_0 набуде таких значень:

$$D_0 = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} a_{lj}^0 x_j \le b_l^0,\ l \in Q = \{1,\dots,m\},\ j \in J = \{1,\dots,n\} \right\}, \quad (2.1)$$

а множина критеріїв дорівнює:

$$f = \left\{ f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to \max,\ i \in I = \{1,\dots,M\} \right\}. \quad (2.2)$$

Параметри $a_{lj}^0, b_l^0, l \in Q, c_{ij}, i \in I, j \in J,$ що характеризують область D_0 і множину критеріїв *f*, можуть змінюватись на величини $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, l \in Q, \Delta c_{ij}, i \in I, j \in J,$ на які накладаються додаткові умови, що утворюють обмежену область P_0. Вони задаються експертами на основі технічно-економічних можливостей задачі. Як і в загальній постановці задачі, уважаємо, що зміна області допустимих розв'язків D_0 і критеріальних функцій *f* використовується тільки з метою досягнення бажаних для ОПР розв'язків *G* сформульованої задачі.

З а у в а ж е н н я. ОПР визначає *G* відповідно до найбільшого діапазону змін значень критеріїв $\left[f_{i(\min)}, f_i^0 \right], i \in I,$ що досягаються на вихідній області D_0, де

$$f_i(G) \in [f_{i(\min)}, f_i^0],\ i \in I, \forall x \in G,$$

$$f_{i(\min)} = \min_{x \in D_0} f_i(x),$$

$$f_{i(\max)} = \max_{x \in D_0} f_i(x),\ \ f_i^0 = \begin{cases} f_{i(\min)}, i \in I_2 \\ f_{i(\max)}, i \in I_1, I_1 \cup I_2 = I. \end{cases}$$

Не обмежуючи загальності, уважатимемо, що всі функції множини *f* максимізуються.

Залежно від обраного способу задання моделі ЦУ та її узгодженості з інтересами системи в досягненні покращених показників за множиною критеріїв, від того, залежні параметри чи ні, можливі різні постановки задачі системної оптимізації й підходи до її розв'язання.

Основною метою алгоритмів системної оптимізації для багатокритерійних задач лінійного програмування, орієнтованих на різні способи задавання вимог ОПР, є створення нової допустимої області D_1 (відповідно до першорядної області D_0 і області варіацій параметрів P_0), в якій існуватимуть розв'язки зі значеннями критерійних функцій не гірше від значень із множини, що задана ОПР.

Зупинимось на розгляді алгоритму системної оптимізації для багатокритерійних задач лінійного програмування, орієнтованого на задання вимог ОПР у просторі рішень.

2.2. Алгоритм системної оптимізації з моделлю цільових установок у просторі рішень

Нехай ОПР задає свої вимоги *G* через бажані значення розв'язку x^* зі значеннями критерійних функцій $f_i^* = f_i(x^*), i \in I$, тобто $G = \{x : x_j = x_j^*, \ j \in J\}$.

Точка x^* не належить вихідній області допустимих розв'язків $D_0 : x^* \notin D_0$.

Потрібно створити нову допустиму область D_1 відповідно до початкової області D_0 і обмеженнями на варіації її параметрів P_0, а саме таку, в якій існує розв'язок $x^k \in D_1$, що

$$f_i(x^k) \geq f_i^*, \ i \in I, \ x^* \in D_1.$$

Задання бажаної точки x^* створює напрям пошуку розв'язку задачі багатокритерійної оптимізації, який визначається вектором переваг критеріїв $\rho^* = \{\rho_i^*, i \in I\}$. Компоненти $\rho_i^*, i \in I$ обчислюють за такими формулами:

$$\rho_i = \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} w_j(x) / \sum_{q \in I} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq q}} w_j(x), \qquad (2.3)$$

де $w^* = \{w_i^* = w_i(f_i(x^*)), i \in I\}$,

$$w_i(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i(x) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0}, & i \in I_2 \\ \dfrac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0 - f_{i(\min)}}, & i \in I_1 \end{cases}$$ – монотонні перетворення множини критеріїв f, $f_{i(\max)}$, f_i^0, $f_{i(\min)}$, $i \in I$ – максимальні, оптимальні й мінімальні значення критеріїв.

Позначимо x_0^k як ефективний розв'язок задачі $\{f, D_o\}$, знайдений методом обмежень із заданим вектором $\rho = \rho^*$. Оскільки точка x^* не належить області D_0, тому вважатимемо, що $f_i = f_i(x^*) \geq f_i(x_0^k), i \in I$, (2.4) і хоча б одна із нерівностей строга. У цьому випадку будемо говорити, що x^* "краще" за x_0^k. А якщо ні, то значення критеріїв для розв'язку x_0^k будуть кращі, ніж для x^*, і задача побудови нової області D_1 не виникає.

Визначимо номери обмежень у D_0 , що порушуються при підстановці в них $x = x^*$. Це буде множина індексів суттєвих обмежень, яку позначаємо через $Q_0 = \{l : \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j^* > b_e, l \in Q\}$.

Теорема 1. Якщо $f_i(x^*) \geq f_i(x_0^k)$, і хоча б одна нерівність строга, то допустимі розв'язки системи D_0 , які знаходяться на гіперплощинах з номерами із множини Q_0, є ефективними за множиною критеріїв f.

Отже для того, щоб x^* стало допустимим розв'язком, необхідно змінити вхідну область D_0 за рахунок варіацій параметрів обмежень з індексами із множини Q_0. Ці зміни, згідно з теоремою 1, приводитимуть до покращення значень критеріїв.

Накладемо на варіації параметрів Δa_{lj} і Δb_l обмежень з номерами із множини Q_0 такі умови:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \Delta a_{lj} - \Delta b_l \le b_l^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{lj}^0 x_j^*,\ l \in Q_0. \tag{2.5}$$

$$\Delta b_l > -b_l^0, \quad \text{якщо} \quad b_l^0 > 0, l \in Q_0;$$

$$\Delta b_l < \left| b_l^0 \right|, \quad \text{якщо} \quad b_l^0 < 0, l \in Q_0;$$

$$\Delta a_{lj} > -a_{lj}^0,\ \text{якщо}\ a_{lj}^0 > 0,\ j = 1,...,n,\ l \in Q_0; \tag{2.6}$$

$$\Delta a_{lj} < \left| a_{lj}^0 \right|,\ \text{якщо}\ a_{lj}^0 < 0,\ j = 1,...,n,\ l \in Q_0.$$

Позначимо через P область зміни параметрів обмежень з номерами із множини Q_0, що описується співвідношеннями (2.5), (2.6). Побудована у такий спосіб область зміни параметрів необмежена і може мати необмежену кількість розв'язків. Умови (2.5) дозволяють зробити точку x^* допустимою в новій області D_1 (x^* у цій області задовольнятиме обмеженням Q_0, а обмеженням Q/Q_0 вона задовольняє за постановкою задачі). Обмеження (2.6) необхідні для того, щоб при зміні параметрів з індексами із множини Q_0 сліди їхніх гіперплощин на осях $x_j,\ j = 1,...,n$ у просторі X залишились на тих самих півосях (фізичний зміст обмежень не змінювався).

За допомогою ОПР формується область обмежень P_0 на варіації параметрів:

$$P_0 = \{\Delta a_{lj}, \Delta b_l,\ j = 1,...,n,\ l \in Q_0\}.$$

Якщо $P \cap P_0 \ne \varnothing$ і є обмеженою, то можна розв'язати задачу побудови нової області D_1, в якій точка x^* буде допустимою. Неоднозначність вибору варіацій параметрів ліквідується шляхом формування й розв'язування додаткових задач оптимізації за вибором зміни параметрів вихідної допустимої області D_0.

Якщо ж $P \bigcap P_0 = \varnothing$, то необхідно змінювати обмеження P_0, або вибирати нову бажану точку x^*. Детально на цьому питанні зупинятися не будемо.

Для знаходження величин $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, \ j=1,...,n, \ l \in Q_0$ сформулюємо додаткову задачу оптимізації, в якій у ролі критерію виберемо витрати, пов'язані зі змінами параметрів моделі:

$$\Delta b = \{\Delta b_l, \ l \in Q_0\}, \ \Delta a = \{\Delta a_{lj}, \ l \in Q_0, \ j = 1,...,n\}.$$

Позначимо функцію витрат через $c(\Delta a, \Delta b)$.

Тоді задача вибору варіацій параметрів зводиться до задачі оптимізації:

$$\min_{\Delta a, \Delta b \in P \cap P_0} c\,(\Delta a, \Delta b). \qquad (2.7)$$

Якщо функцію витрат $c(\Delta a, \Delta b)$ побудувати не можна, то задачу знаходження величин $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, \ j=1,...,n, \ l \in Q_0$ можна сформулювати як багатокритерійну, в якій кожний параметр виступає як окремий критерій, величина зміни якого $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, \ j=1,...,n, \ l \in Q_0$ (залежно від фізичної суті може або максимізуватись, або мінімізуватись).

Позначимо $F = \{\Delta a_{lj}, \Delta b_l, \ l \in Q_0, \ j \in J\}$ множину критеріїв, що сформульована за параметрами, при варіації яких здійснюється побудова нової допустимої області. Вибір варіацій параметрів $\Delta a_{lj}, \Delta b_l$ зводиться до задачі багатокритерійної оптимізації за множиною критеріїв

$$F = \{\Delta a_{lj}, \ \Delta b_l, \ l \in Q_0, \ j \in J\} \qquad (2.8)$$

із урахуванням обмежень $\Delta a, \Delta b \in P \cap P_0$.

Зміни параметрів області допустимих розв'язків можуть у деяких випадках порушити обмеженість і замкненість нової області D_1. У зв'язку з цим зупинимось детальніше на дослідженні цього питання.

Твердження 1. Якщо серед обмежень області D_0 існують такі, для яких $a_{lj}^0 > 0, \ j=1,...,n, \ b_l^0 > 0,$ тоді область, що побудована за рахунок зміни параметрів обмежень з індексами із множини Q_0 згідно з (3.5), (3.6), є обмеженою та замкненою.

Позначимо через $Q_>$ множену індексів обмежень, для яких $a_{lj}^0 > 0,\ j = 1,...,n,\ b_l^0 > 0$. Якщо множина $Q_>$ порожня, а область D_0 замкнена й обмежена, то для побудови області D_1, яка також буде замкненою і обмеженою, вчинимо так. Побудуємо нерівність $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j - b_{m+1} < 0$, яка є наслідком системи D_0. Величину b_{m+1} визначимо як $\max\limits_{x \in D_0} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$.

Величини зміни параметрів $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, \Delta a_{m+1\,j}, \Delta b_{m+1},\ l \in Q_0$, $j = 1,..., n$ знайдемо при розв'язуванні задачі вигляду (2.7) або (2.8) із урахуванням того, що вони належать перетину множин P і P_0, де P будується шляхом приєднання до області P нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \Delta a_{m+1\,j} - \Delta b_{m+1} \le b_{m+1} - \sum_{j=1}^{n} x_j^*$$

$$\Delta a_{m+1\,j} > -1,\ j = 1,...,n,$$

$$\Delta b_{m+1} > -b_{m+1}\,.$$

Позначимо нові значення параметрів через

$$a_{lj} = \begin{cases} a_{lj}^0,\ l \in Q / Q_0, \\ a_{lj}^0 + \Delta a_{lj},\ l \in Q_0, \end{cases} \quad j = 1,...,n,$$

$$b_1 = \begin{cases} b_l^0,\ l \in Q / Q_0, \\ b_l^0 + \Delta b_l,\ l \in Q_0, \end{cases}$$

де $\Delta a_{lj}, \Delta b_l, l \in Q_0,\ j = 1,...,n$ визначаються при розв'язанні задачі (2.7) або (2.8). Нова область допустимих розв'язків при виконанні умов твердження 1 матиме вигляд:

$$D_1 = \{x : \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \le b_l,\ l \in Q,\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,n\}. \qquad (2.9)$$

Якщо умови твердження 1 не виконуються, тоді нову область допустимих розв'язків D_1 визначимо у такий спосіб:

$$D_1 = \{x : \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \le b_l, l \in Q, j = 1,...,n, \sum_{j=1}^{n} \grave{a}_{m+1j} x_j \le \grave{b}_{m+1}\},$$

де $\grave{a}_{m+1j} = \Delta a_{m+1j} + 1,\ \grave{b}_{m+1} = b_{m+1} + \Delta b_{m+1},\ j = 1,...,n.$ Область D_1, що побудована вищевказаним способом, буде замкненою і обмеженою відповідно до твердження 1 (оскільки вона має одне обмеження зі всіма додатними коефіцієнтами).

Оскільки нова область допустимих розв'язків D_1 замкнена й обмежена, то на ній існують ефективні розв'язки задачі (2.2), (2.9).

Твердження 2. В області D_1 існує розв'язок x^k, для якого $f_i(x^k) \ge f_i(x^*),\ i \in I.$ Таким розв'язком, зокрема, є

$$x^k = \arg \min_{x \in D_1} \max_{i \in I} \rho^*_{i(1)} w_{i(1)}(x),$$

де $w_{i(1)}(x), i \in I$ – побудовані відповідно до області D_1, а $\rho_{i(1)}$, $i \in I$ – визначені за формулою (2.3) за точкою $w_i(x^*)$ для області D_1.

В алгоритмі реалізуються всі етапи загальної схеми рішення задач системної оптимізації, за винятком другого (необхідність використання якого відсутня), і шостого, здійснення якого значною мірою залежить від специфіки реальної конкретної задачі та можливостей ОПР при виборі x^* або P_0.

Отже викладений підхід дозволяє будувати нову область D_1, в якій бажаний розв'язок буде допустимим і забезпечує існування розв'язку задачі багатокритерійної оптимізації на новій області зі значенням критерійних функцій, не гірших за бажані.

2.3. Приклад розв'язання задачі системної оптимізації

Розглянемо приклад однієї із задач підтримки прийняття рішень стосовно розвитку інфраструктури зарядних станцій для електромобілів в Україні, що використовує методологію системної оптимізації. Кожна машина може зарядитися певним видом зарядки залежно від свого роз'єму та типу зарядної станції. За Європейським стандартом використовують такі типи зарядних станцій: "Mode 1", "Mode 2", "Mode 3", "SAE J1772", "Mennekes", "CCS Type 2", "Mode 4", "CCS Combo 2". Електромобіль (BEV – battery electric cars) – автомобіль, що приводиться у рух одним або декількома електродвигунами із живленням від акумуляторів або паливних елементів, а не двигуном внутрішнього згоряння. Зарядні станції – стаціонарні точки струму, від яких можна зарядити електромобіль. Існують різні типи станцій залежно від змінного чи постійного струму, його потужності тощо. Наприклад, Mode 3 – одно- або трифазна зарядка змінним струмом з використанням спеціального роз'єму, в якому реалізована система захисту й контролю за ходом зарядки електромобіля. За допомогою цих станцій можливо заряджати автомобілі як з однофазним роз'ємом, так і з трифазним. Mode 4 – швидка зарядка постійним струмом, що допускає 600 Вт і до 400 А.

Нехай x_1 – зарядна станція швидкого заряджання зі змінним струмом; x_2 – зарядна станція швидкого заряджання постійним струмом.

Точка x^* задається згідно з такою інформацією: за даними Державного агентства з енергоефективності й енерго-забезпечення до кінця 2023 р. кількість електромобілів в Україні має зрости до 9000 (часто такі прогнози виявляються дуже заниженими). Спираючись на те, що для найкращої інфраструктури зарядних станцій достатньо однієї заправки на 3–4 машини, тобто на 9000 електромобілів потрібно 3000 зарядних станцій, та на те, що станція Mode 3 заряджає у вісім разів повільніше, ніж Mode 4, доходимо висновку, що для оптимального користування потрібно 2667 зарядних станцій Mode 3 та 333 зарядних станцій Mode 4.

Розглянемо задачу системної оптимізації.

$$f = \{ f_1(x) = x_1 + x_2 \to \max, f_2\ (x) = 8x_1 - x_2 \to \max \},$$

$$D_0 = \begin{cases} 276x_1 \ - 70_{x_2} \ \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \leq 6650 \\ 20{,}5x_1 - 182x_2 \leq 0 \\ 1280_{x_1} + 162x_2 \geq 1450 \\ 8x_2 + x_2 \geq 1450 \end{cases}$$

Перший критерій описує задачу максимізації кількості зарядних станцій в Україні; другий – різницю кількості зарядних станцій одного та другого типу, якого ми прагнемо, при чому ця кількість максимізується.

Перше обмеження описує відносну залежність часу заряджання, при чому час заряджання від Mode 3 з коефіцієнтом 276 буде не менший за час заряджання від Mode 4 з коефіцієнтом 70.

Друге обмеження: сума відношення електромобілів з тим чи іншим роз'ємом буде менша за приблизну кількість машин на кінець року.

Третє обмеження: якщо встановити зарядну станцію Mode 3, що коштує 20,5 умовних одиниць, то ця величина буде не більше за ціну встановлення Mode 4, яка коштує 182 умовні одиниці.

Четверте обмеження: приблизна кількість Mode 3 в Україні була 1280, а Mode 4 – 161. Тоді їхня кількість буде більшою за їхню суму (1450).

Останнє обмеження забезпечує оптимальне відношення кількості зарядних станцій. Тому якщо Mode 3 заряджає у 8 разів повільніше за Mode 4, то для оптимального плану їхня сума все одно має бути більше за 1450.

$G = x^* = \{2667, 333\}$ – запланована кількість зарядних станцій відповідно для машин, що заряджаються змінним струмом, а також машин, що заряджаються постійним на 2023 р.

Для розв'язання задачі побудуємо графічну модель допустимої області (рис. 2.1). Із неї знаходимо координати кутових точок в області D_0 :

$$A(248,079) = \max\ f_1;$$
$$B(179,20) = \min\ f_1;$$
$$C(581,65) = \max\ f_2;$$
$$D(121,65) = \max\ f_2.$$

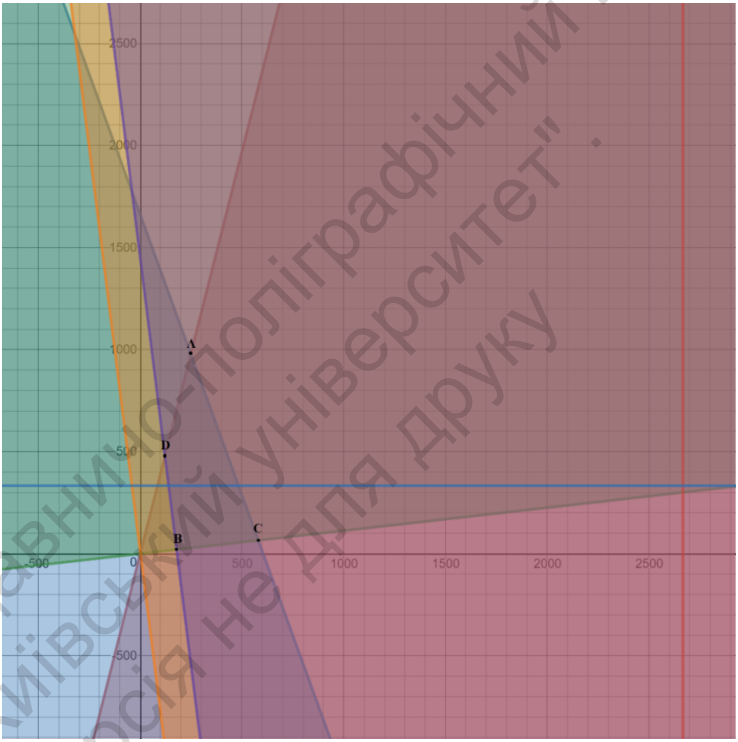

Рис. 2.1. Область допустимих розв'язків D_0

Знайдемо $f(x_0^k)$ і порівняємо з $f(\text{x}^*)$. Для цього обчислюємо:

$f_1^0 = f_1(A) = 248 + 979 = 1227,\ f_{1(\min)} = f_{1(\min)}(B) = 179 + 20 = 199,$

$$f = f\ (C) = 1678,\ f = f\ (B) = -801,$$

$$\rho_1 = \frac{\omega_1\ (x^*)}{\omega_1\ (x^*) + \omega\ (x^*)} = 0,3,$$

$$\rho_2 = \frac{\omega_2 (x^*)}{\omega_1\ (x^*) + \omega_2\ (x^*)} = 0,7.$$

Застосуємо метод обмежень, отримаємо задачу оптимізації:

$$k \to \min,$$

$$\rho\omega \le k, i = 1, ..., M,$$

$$x \in D_0,\ k \ge 0.$$

Розв'яжемо систему $\rho_1\omega_1 = k$ з параметром $k,\ k \in \left(0, \dfrac{1}{M}\right)$.

$$\begin{cases} \dfrac{(1401 - x_1 - x_2)}{1678} 0,35 = k; \\ \dfrac{(1678 - 3x_1 + x_2)}{2479} 0,65 = k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1401 - x_1 - x_2 = 3434k; \\ 1678 - 3x_1 + x_2 = 3814k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3770 - 1812k; \\ x_2 = 631 - 1622k. \end{cases}$$

Здійснимо ітераційний процес метода обмежень відносно параметра $k,\ k \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ з точністю $\le 0,1$.

На перших трьох ітераціях $i = 1, 2, 3,\ x \in D_0$, на четвертій при $k(4) = 0,12,\ x \notin D_0$.

Точність $\varepsilon = \left[k\ (3) - k\ (4)\right| = 0,03$.

Наближений розв'язок задачі із заданою точністю дорівнює:

$$x_k^0 = x\ (\mathrm{k} = 0,20) = (480{,}133),\ f\ (x_k^0) = (613{,}3707);$$

$$x^* = (2667{,}333);\ f(\mathrm{x}^*) = (3000{,}21003).$$

Таблиця 2.1

Значення параметра _k_ на чотирьох ітераціях

Номер ітерації _i_	**1**	**2**	**3**	**4**
k	0,18	0,16	0,15	0,12
x_1	453	469	480	519
x_2	58	103	133	238

Отримаємо. $f\,(x_k^0) < f(x^*)$. Отже продовжуємо розв'язання задачі системної оптимізації.

x^* порушує лише друге обмеження $11x_1 + 4x_2 \le 6650$, тому $Q_0 = \{2\}$.

Для того, щоб x^* стало допустимим розв'язком, необхідно змінити вхідну область D_0 за рахунок варіації параметрів.

Побудуємо обмеження на варіації параметрів:

$$\Delta a_{lj}, \Delta b_l, l \in D_{0,}\ j \in J$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j^* \,\Delta\alpha_{lj} - \Delta b_1 \le b_l^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{lj}^0 x_j^*, l \in Q_0\right.$$

$$\Delta b_1 \le b_l^0, \qquad b_l^0 > 0 \qquad , \quad l \in Q_0,\ j \in J$$

$$\Delta b_1 < \left|-b_l^0\right|, \quad b_l^0 < 0$$

$$\Delta a_{lj} > -\,a_l^0, \quad a_l^0 > 0$$

$$\Delta a_{lj} > \left|-a_{lj}^0\right|, \quad a_l^0 \text{ б } 0$$

Звідси маємо:

$$\begin{cases} 2667\Delta a_{21} + 333\Delta a22 - \Delta b_2 \le 6650 - 11 * 2667 - 4 * 333, \\ \Delta b_2 > -6650, \\ \Delta a_{21} > -11, \\ \Delta a_{21} > -4. \end{cases}$$

Покладемо $\Delta b_2 = 0$: $\begin{cases} 2667\Delta a_{21} + 333\Delta a_{22} \le -24019, \\ \Delta a_{21} > -11, \\ \Delta a_{22} > -4. \end{cases}$

Оберемо за $\Delta a_{21} = -10,\ \Delta a_{22} = 0$.

Тоді друге обмеження в області $D_0: 11x_1 + 4x_2 \le 6650$ змінюється на $x_1 + 4x_2 \le 6650$.

Нова область допустимих розв'язків набуває вигляду:

$$D_1 = \begin{cases} 276 - 70x_2 \ge 0 \ (1^*) \\ 1x_1 + 4x_2 \le 6650 \ (2^*) \\ 20{,}5x_1 - 182x_2 \le 0 \ (3^*) \\ 1280x_1 + 162x_2 \ge 1450 \ (4^*) \\ 8x_1 + 1x_2 \ge 1450 \ (5^*) \end{cases},$$

Графічна модель області D_1 має вигляд (рис. 2.2):

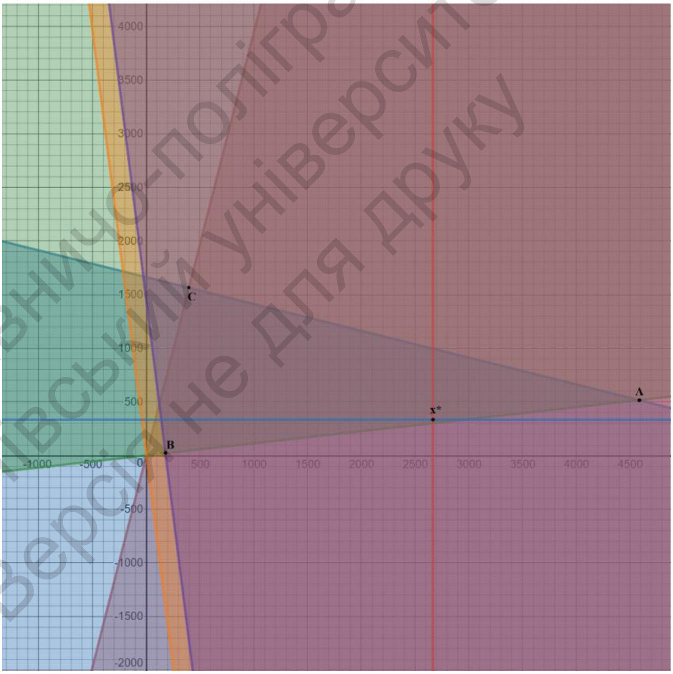

Рис. 2.2. Нова область допустимих розв'язків D_1

Із графічної моделі задачі знаходимо нові координати кутових точок в області D_1:

$$A\,(4584, 516) = \max\ f_1; \quad \mathrm{B}\,(179, 20) = \min\ f_1;$$

$$A\,(4584, 516) = \max\ f_2; \quad \mathrm{X}\,(121, 479) = \min\ f_2.$$

Знайдемо значення $f\left(x_0^k\right)$ і порівняємо його із $f\,(x^*)$. Для цього обчислимо: $f_1^{\,0} = f_1\,(A) = 4584 + 516 = 5100,$

$$f_{1\,(\min)} = f_{1\,(\min)}\,(B) = 179 + 20 = 199,$$

$$\omega_1\,(\,f_1\,(x_1, x_2)) = \frac{f_1\,(x^{\max}) - f_1\,(x_{1,}\,x_2)}{f_1(x^{\max}) - f_1(x_{\min})\ _1} = \frac{5100 - x_1 - x_2}{4901},$$

$$\omega_1(x^*) = 0,42\,,$$

$$f_2^{\,0} = f_2\,(C) = 36156,\ f_{2\,(\min)} = f_{2\,(\min)}\,(B) = 35667,$$

$$\omega_2\,(\,f_2\,(x_{1,}x_2)) = \frac{f_2 x\,(^{\max)} - f_2\,(x_1, x_2)}{f_2 x\,(^{\max)} - f_2\,(x_{\min})} = \frac{1678 - 3x_1 + x_2}{2479},$$

$$\omega_2\,(x^*) = 0,42$$

$$\rho_1 = \frac{\omega_1(x^*)}{\omega_1(x^*) + \omega(x^*)} = 0,5, \quad \rho_2 = \frac{\omega_2(x^*)}{\omega_1\,(x^*) + \omega_2\,(x^*)} = 0,5.$$

Застосуємо метод обмежень, отримаємо задачу оптимізації для знаходження $f\,(x_0^{\;k})$:

$$k \to \min,$$
$$\rho_i\omega_i \le k,\ i = 1, .., M,$$
$$x \in D_0,\ k \ge 0.$$

Розв'яжемо систему $\rho_1\omega_1 = k$ з параметром $k, k \in \left(0, \dfrac{1}{M}\right).$

$$\begin{cases} 5100 - x_1 - x_2 = 9802k; \\ 36146 - 8x_1 + x_2 = 71332k; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 4584 - 9015k \\ x_2 = 516 - 787k. \end{cases}$$

Здійснимо ітераційний процес метода обмежень відносно параметра $k, k \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ з точністю $\le 0,1.$

Таблиця **2.2**

Значення параметра *k* на чотирьох ітераціях в області D_1

Номер ітерації *i*	**1**	**2**	**3**	**4**
k	0,4	0,3	0,2	0,1
x_1	978	1880	2781	3683
x_2	201	280	359	437

На всьому проміжку $k,\, k \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right),\ x_k{}^0 \in D_1.$

Тоді наближений розв'язок задачі із заданою точністю дорівнює:

$$x_k{}^0 = x\left(k = 0{,}21\right) = \left(2690{,}350\right),\ f\left(x_k{}^0\right) = (3040{,}21170);$$

$$x^* = (2667{,}333);\ f\left(x^*\right) = \left(3000{,}21003\right).$$

Отримуємо $f\ (x_k{}^0) \geq f\ (x^*)$. Отже задача системної оптимізації розв'язана.

Зробимо висновок, що для покращення інфраструктури зарядних станцій в Україні потрібно збільшити їхню кількість – мати в Україні до кінця 2023 р. 2667 зарядних станцій європейського стандарту Mode 3 та 333 зарядних станцій постійного струму Mode 4.

2.4. Алгоритм системної оптимізації, який орієнтований на задання бажаних значень критеріїв

Нехай ОПР задає бажані значення критеріальних функцій, що визначаються множиною $f^* = \{f_i^*,\ i \in I\}$. Точка f^* у просторі значень критеріїв не належить області значень критеріїв $f\,(D_0)$ для допустимих розв'язків D_0 .

Уважатимемо, що для бажаних значень цільових функцій виконуються нерівності (2.4) і хоча б одна з них строга. А це означає, що необхідно змінювати параметри системи (2.1), (2.2) у такий спосіб, щоб вони задовольнили бажаним значенням цільових функцій.

Установимо сумісність систем нерівностей

$$G = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geq f_i^*,\ i \in I,\ x_j \geq 0,\ j = 1 \ldots n \right\}, \qquad (2.10)$$

що утворюють модель директив G у просторі розв'язку.

Якщо система сумісна, то можна знайти її допустимий розв'язок $x^*, x^* \in G$. Оскільки $x^* \notin D_0$, то відносно x^* потрібно буде повторити викладену в 2.2 процедуру зміни області D_0. Якщо нову допустиму область D_1 можна побудувати, то в ній завжди існуватиме розв'язок ${x_{(1)}}^k$ багатокритеріальної задачі, для якого $f_i({x_{(1)}}^k) \geq f_i^* i \in I$.

При виборі x^*, що задовольняє (2.10), становить інтерес не будь-який розв'язок, а тільки той, який буде кращим у розумінні розв'язування багатокритеріальної задачі. Для його вибору зробимо такі дії. Задамо довільні границі кожної змінної, тобто $x_j \in [o,\ h_j]$, де h_j – велике довільне число. Застосуємо до цих інтервалів процедуру зменшення, аналогічну процедурі відсіву завідомо недопустимих розв'язків дискретних оптимізаційних задач. Нехай на k-му кроці застосування цієї процедури одержані такі границі:

$$h_{j(H)}^{(k)} \leq x_j \leq h_{j(B)}^{(k)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Тоді границі на $k+1$-му кроці визначаються у такий спосіб:

$$h_{j(H)}^{(k+1)} = \max\{\max_{i \in I_j^+}\{c_{ij}^{-1} \times$$
$$\times (f_i^* - \sum_{\substack{r \in I_i + \\ r \neq j}} c_{ir} h_{r(B)}^{(k)} - \sum_{\substack{r \in I_i^- \\ r \neq j}} c_{ir} h_{r(H)}^{(k)})\}, h_{j(H)}^{(k)}\}, \qquad (2.11)$$

$$h_{j(B)}^{(k+1)} = \min\{\min_{i \in I_j^-}\{c_{ij}^{-1} \times$$
$$\times (f_i^* - \sum_{\substack{r \in I_i + \\ r \neq j}} c_{ir} h_{r(B)}^{(k)} - \sum_{\substack{r \in I_i^- \\ r \neq j}} c_{ir} h_{r(H)}^{(k)})\}, h_{j(B)}^{(k)}\},$$

$$I_j^{+} = \{i : i \in I, c_{ij} > 0,\ j \in \{1,...,n\}\},$$

$$I_j^{-} = \{i : i \in I, c_{ij} < 0,\ j \in \{1,...,n\}\}, I_j^{-} \cup I_j^{+} = I,$$

$$I_i^{+} = \{j : j \in \{1,...,n\}, c_{ij} > 0, i \in I\},$$

$$I_i^{-} = \{j : j \in I, c_{ij} < 0, i \in I\}, I_i^{+} \cup I_i^{-} = \{1,...,n\},$$

$$I_i^{0} = \{j : j \in J, c_{ij} = 0\},\ i \in I.$$

На нульовому кроці $h_{j(H)} = 0,\ h_{j(B)}{}^{0} = h_j$.

Процедура зупиняється, якщо

$\varepsilon = \max\limits_{j=1,\ ...,\ n} \{h_{j(H)}{}^{(k+1)} - h_{j(H)}{}^{(k)},\ h_{j(B)}{}^{(k+1)} - h_{j(B)}{}^{(k)}\}$ – доволі мале.

Позначимо $\Pi^{(1)} = \prod\limits_{j=1}^{m} \left[h_{j(H)}{}^{(l)}, h_{j(\text{B})}{}^{(l)} \right]$ як паралелепіпед, побудований на останньому l-му кроці. При цьому, якщо $h_{j(B)}{}^{(l)} = h_j$, $j = 1,...,n,$ тоді область змінних, що описана нерівностями (2.10), не обмежена. Якщо область (2.10) – замкнена й обмежена, то процедура не відкине жодного допустимого розв'язку системи нерівностей (2.10).

Зокрема, якщо існує номер $i \in I$, для якого

$$\max_{x \in \prod^{(l)}} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j < f_i^{*},$$

то система (2.10) несумісна.

Позначимо

$$x^{*k} = \arg\min_{x \in \prod^{(l)}} \max_{i \in I} \rho_i^{*\Pi} w_i^{\Pi},$$

де $w_i^{\Pi} = w_i^{\Pi}(x),\ i \in I$ – раніше введені перетворення, підраховані для паралелепіпеда $\Pi^{(l)}$, а $\rho_i^{*\Pi},\ i \in I$ – вагові коефіцієнти, що визначаються за формулою (2.3) через точку f^{*} у просторі $w_i^{\Pi},\ i \in I$.

Твердження 3. Якщо $f_i(x^{*k}) \le f_i^{*},\ i \in I$ і хоча б одна з нерівностей була строга, то система (2.10) несумісна.

Отже, якщо виявляється, що система нерівностей (2.10) несумісна, то виникає необхідність у зміні параметрів множини функцій f.

При цьому в ролі точки, відносно якої треба розв'язувати цю задачу системної оптимізації, доцільно вибрати точку x^{*k}, оскільки вона є найкращою на паралелепіпеді $\Pi^{(l)}$ для множини критеріїв f і вектора переваг $\rho^{*\Pi}$, що визначається за заданою точкою $f^* = \{ f_i^*, i \in I \}$.

Позначимо I_0 як множину номерів нерівностей (2.10), які не виконуються в точці x^{*k}. Тоді область зміни коефіцієнтів цільових функцій з індексами із множини I_0 визначиться за аналогією з областю (2.5), (2.6) таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_{ij} x_j^{*k} - \Delta f_i^* \geq f_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{*k}, i \in I_0; \qquad (2.12)$$

$$\Delta c_{ij} > -c_{ij}, \text{ якщо } c_{ij} > 0,\ j \in I_i^+;$$

$$\Delta c_{ij} > | c_{ij} |, \text{ якщо } c_{ij} < 0,\ j \in I_i^-;$$

$$\Delta f_i^* > - f_i^*, i \in I_0.$$

P – область зміни коефіцієнтів c_{ij}, f_i^*, $i \in I_0$, що описана співвідношеннями (2.12). При цьому ми не турбувалися про те, щоб область, яка описана нерівностями (2.10), була замкненою і обмеженою – у цьому випадку нас цікавить тільки забезпечення сумісності цих нерівностей. P_0 – область їхньої зміни, що задана на основі техніко-економічних можливостей розглядуваної задачі. Тоді, якщо $P \cap P_0 \neq \varnothing$, то для знаходження величин Δc_{ij} і Δf_i^* можна сформулювати задачі, аналогічні (2.7) або (2.8). При $P \cap P_0 = \varnothing$ необхідно змінити область P_0, якщо $h_{j(B)}{}^{(l)} \neq h_j$ хоча б для одного j, $j = 1, \ldots, n$, або знайти нову точку $\tilde{x}^{*k} \in \Pi^{(l)}$, яка буде "гірша" x^{*k} за множиною критеріїв f.

Якщо система нерівностей (2.10) сумісна, або якщо ми змогли змінити модель цільових функцій у такий спосіб, що точка $x^* = x^{*k}$ задовольняє (2.10), то можна розв'язати задачу системної оптимізації за зміною області D_0 відносно точки x^{*k}, оскільки це викладено в підрозд. 2.2. Якщо при побудові нової області відносно розв'язку x^{*k} виявиться, що відповідна область $P \cap P_0 = \varnothing$, то в цьому випадку потрібно або шукати нову точку $\tilde{x}^{*k} \in \Pi^{(l)}$, або змінювати область P_0.

Отже викладений вище підхід дозволяє будувати нову область D_1, в якій існуватиме розв'язок зі значенням критеріїв, що кращі або рівні заданим бажаним значенням f^*.

2.5. Основні процедури системної оптимізації, що базуються на заданні інтервалів бажаних розв'язків

Нехай модель директив G задана у вигляді інтервалів зміни розв'язків $G = \{x\colon x_j(H) \le x_j \le x_j(B),\ j=1,\ldots,n\}$. Для зручності викладення наступних алгоритмів позначимо паралелепіпед, що утворився такими інтервалами $\Pi = \prod_{j=1}^{n} [x_j(H), x_j(B)]$, $G = \Pi$.

Розглянемо чергову постановку задачі системної оптимізації. Нехай $G \cap D_0 = \varnothing$.

Необхідно побудувати нову область D_1 (змінюючи область допустимих розв'язків D_0, із врахуванням обмежень P_0 на варіації її параметрів), в якій для будь-якого $x \in \Pi$ існуватиме розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації x^k, $x^k \in D_1$ такий, що $f_i(x^k) \ge f_i(x)$, $i \in I$.

Відповідно до твердження 2 ці вимоги будуть виконані, якщо всі точки паралелепіпеда Π перебуватимуть у новій допустимій області.

Перед тим як розглянути процедуру занурення бажаного паралелепіпеда П у нову область D_1, здійснимо перший етап загальної схеми розв'язання задачі системної оптимізації, тобто визначимо варіант його розміщення відносно множини допустимих розв'язків D_0.

Позначимо

$f_i^{\Pi} = \max\limits_{x \in \Pi} f_i(x) = \sum\limits_{j \in I_i^-} c_{ij} x_j(H) + \sum\limits_{j \in I_i^+} c_{ij} x_j(B),\ i \in I$ – як оптимальні,

а $f_{i(\min)}^{\Pi} = \min\limits_{x \in \Pi} f_i(x) = \sum\limits_{j \in I_i^-} c_{ij} x_j(B) + \sum\limits_{j \in I_i^+} c_{ij} x_j(H),\ i \in I$ – як найгірші значення за кожним критерієм множини (2.2) на паралелепіпеді П, де

$$I_i^+ = \{ j : j = \{1, \ldots, n\}, c_{ij} > 0, i \in I \},$$

$$I_i^- = \{ j : j = \{1, \ldots, n\}, c_{ij} < 0, i \in I \}.$$

Уважатимемо, що значення цільових функцій для розв'язків, які належать паралелепіпеду П, перебувають у діапазоні $\left[f_{i(\min)}, f_i^0 \right]$, $i \in I$, де $f_{i(\min)} = \min\limits_{x \in D_0} f_i(x)$, $i \in I$ $f_i^0 = \max\limits_{x \in D_0} f_i(x)$, $i \in I$, відповідно, найгірші й найкращі значення критеріїв в області D_0. У просторі перетворених значень критеріїв

$$W = \{ w = \{ w_i(f_i(x)), i \in I \} \},$$

точкам $f^{\Pi} = \{ f_i^{\Pi}, i \in I \}$, $f_{(\min)}{}^{\Pi} = \{ f_{i(\min)}^{\Pi}, i \in I \}$

відповідатимуть точки

$$w^{\Pi} = \{ w_i^{\Pi} = \{ w_i(f_i^{\Pi}) = (f_i^0 - f_i^{\Pi}) / (f_i^0 - f_{i(\min)}), i \in I \} \},$$

$$w_{(\min)}{}^{\Pi} = \{ w_{i(\min)}^{\Pi} = \{ w_i(f_{i(\min)}{}^{\Pi}) = = (f_i^0 - f_{i(\min)}{}^{\Pi}) / (f_i^0 - f_{i(\min)}), i \in I \} \}.$$

У свою чергу точки w^{Π} і $w_{\min}^{\Pi}$ задають напрями пошуку розв'язування задачі (2.1), (2.2)

$$\rho^{\Pi} = \left\{ \rho_i^{\Pi}, i \in I \right\} \quad \text{і} \quad \rho_{(\min)}{}^{\Pi} = \{ \rho_{i(\min)}{}^{\Pi}, i \in I \},$$

що визначаються за формулою (2.3).

Позначимо x_k^0 $x_{k(\min)}$ – як ефективні розв'язки задачі (2.1), (2.2), знайдені, наприклад, при розв'язуванні завдання

$$\min_{x\in D_0}\max_{i\in I_0}\rho_i w_i \, (2.13)$$

для $\rho_i = \rho_i = \rho_{i\,(\min)}{}^{\Pi}, i \in I,$ для відповідних напрямів пошуку.

Нехай $\bar{x}$ – деяка довільна точка паралелепіпеда П, яка визначає напрям пошуку $\bar{\rho}$, знайдений через точку $\bar{w}_i = w_i(f_i(x))$, $i \in I,$ а $\bar{x}_k$ – розв'язок задачі (2.13) при $\rho_i = \bar{\rho}_i, i \in I$.

Сформулюємо такі твердження.

Твердження 4. Якщо для точки $x_{k(\min)}$ виконуються умови

$$f_i(x_{k(\min)}) \le f_{i\,(\min)}^{\Pi}, i \in I \qquad (2.14)$$

і хоча б одна нерівність строга, то для будь-якої точки $\bar{x}$ паралелепіпеда П справедливі співвідношення $f_i(\bar{x}_k) \le f_i\ (\bar{x})$ і хоча б одне з них строге.

Твердження 5. Якщо для точки x_k^0 виконуються умови

$$f_i(x_k{}^0) \ge f_i^{\Pi}, i \in I \qquad (2.15)$$

і хоча б одна нерівність строга, то для будь-якої точки справедливі співвідношення $f_i(\bar{x}_k) \ge f_i\ (\bar{x}), i \in I$ і хоча б одне з них строге.

Умови тверджень 4 і 5 дозволяють виділити такі варіанти розміщення інтервалів бажаних розв'язків відносно області допустимих розв'язків D_0 .

1. Точки паралелепіпеда П мають кращі та рівні значення критеріальних функцій порівняно із розв'язками області D_0 .

2. Паралелепіпед П розміщується відносно області D_0 у такий спосіб, що жодна точка з П не має одночасно кращих значень критеріїв порівняно з розв'язками області D_0 .

3. У паралелепіпеді П тільки частина точок дає одночасно кращі значення критеріїв порівняно з розв'язками області D_0 .

Отже, якщо виконуються умови (2.14), то реалізується перший варіант; якщо здійснюються умови (2.15), то втілюється другий.

Якщо ж умови (2.14) і (2.15) не реалізуються, то можливий будь-який із трьох варіантів і має бути проведено додаткову перевірку, яка визначить реалізований варіант. Її буде описано нижче.

Природно, що необхідність продовжити розв'язування даної задачі системної оптимізації є тільки при здійсненні першого або третього варіанта.

При заданому способі задання моделі директив G, $G = \Pi$, немає необхідності у реалізації другого етапу загальної схеми розв'язування задачі системної оптимізації.

Розглянемо наступну процедуру системної оптимізації для випадку, коли реалізується перший варіант розміщення паралелепіпеда П відносно області D_0.

Позначимо через X^* множину точок паралелепіпеда вигляду

$$X^* = \{x^{*i}, i \in Q : x^{*i} = \arg\max_{x \in \Pi} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j, x^{*i} = \{x_j^{*i}, j = 1,...,n\}\} \quad (2.16)$$

де $x^{*i} = \begin{cases} x_{j(H)}, a_{ij} < 0 \\ x_{j(B)}, a_{ij} > 0, \end{cases} i \in Q, j = 1,...,n,$

а через $Q_0(X^*)$ – множину індексів тих обмежень (2.1), які порушуються при постановці в них точок множини X^*, тобто

$$Q_0(X^*) = \{i : i \in Q, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j^{*i} > b_i^0, x^{*i} \in X^*\}.$$

Накладемо на варіації параметрів Δa_{pj}, Δb_p з індексами із множини $Q_0(X^*)$ такі умови:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta a^0{}_{pj} x_j^{*p} - \Delta b_p^0 \le b_p^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}^0 x_j^{*p}, p \in Q_0(X^*), x^{*p} \in X^* \quad (2.17)$$

$$\Delta b_p > -b_p^0, \text{ якщо } b_p^0 > 0, p \in Q_0(X^*)$$

$$\Delta b_p < \left|b_p^0\right|, \text{ якщо } b_p^0 < 0, p \in Q_0(X^*) \quad (2.18)$$

$$\Delta a_{pj}^0 > -a_{pj}^0, \text{ якщо } a_{pj}^0 > 0, j = 1,..,n, p \in Q_0(X^*)$$

$$\Delta a_{pj}^0 < \left|a_{pj}^0\right|, \text{ якщо } a_{pj}^0 < 0, j = 1,..,n, p \in Q_0(X^*).$$

Вибір обмежень (2.17), (2.18) на варіації параметрів пов'язаний із тим, що умови (2.17) дозволяють зробити точки з X^*, що не належні D_0, допустимими в новій області D_1. Умови (2.18) гарантують, що сліди гіперплощин, які утворюються порушеними обмеженнями з індексами із множини $Q_0\,(X^*)$, після зміни їхніх параметрів залишаться у просторі R^n на тих самих півосях $x_{j,}\ j=1,...,n,$ тобто не зміниться зміст цих обмежень. Як і раніше, позначимо через P область, що утворюється обмеженнями (2.17), (2.18).

Теорема 2. Ефективні розв'язки $x_0 \in D_0$, для яких існують такі точки x паралелепіпеда $П$, що виконуються $f_i(x) \geq f_i(x_0)$, і наявність хоча б однієї строгої нерівність, перебувають на гіперплощинах з індексами із множини $Q_0\,(X^*)$.

Отже для того, щоб точки множини X^* стали допустимими розв'язками, необхідно змінити область D_0 за рахунок зміни обмежень з номерами із множини $Q_0\,(X^*)$. Згідно з теоремою 2, від таких обмежень залежить покращення значень критеріїв.

Нехай $P \cap P_0 \neq \varnothing$. Знаходимо варіації параметрів Δa_{pj}, Δb_p, $j=1,..,n,\ p \in Q_0(X^*)$ при розв'язуванні оптимізаційних задач вигляду (2.7) або (2.8) на області $P \cap P_0$. Побудуємо нову область допустимих розв'язків D_1:

$$D_1 = \{x : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i \in Q, x_j \geq 0,\ j=1,..,n\}\,, \qquad (2.19)$$

де $a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{\ 0},\ i \in Q \setminus Q_0(X^*) \\ a_{ij} + \Delta a_{ij},\ i \in Q_0(X^*) \end{cases}$, $\quad b_i = \begin{cases} b^0{}_{i,} i \in Q \setminus Q_0(X^*) \\ b_i + \Delta b_i, i \in Q_0(X^*) \end{cases}$.

Теорема 3. Якщо варіації параметрів обмежень (2.1) з індексами із множини $Q_0\,(X^*)$ належать області $P \cap P_0$, тоді $П \in D_1$.

Викладена процедура для першого варіанта розміщення паралелепіпеда $П$ дозволяє будувати нову область D_1, в якій усі розв'язки з бажаних інтервалів будуть допустимими. Згідно із твердженням 2, це забезпечує існування розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації (2.2), (2.19) зі значеннями критеріальних функцій, які не гірші за значення діапазону $\left[f^{\Pi}_{i(\min)}, f^{\Pi}_{i} \right]$, $i \in I$.

Розглянемо перевірку, що визначає варіант розміщення паралелепіпеда П відносно області D_0 у тому випадку, якщо одночасно не виконуються умови (2.14) і (2.15). Процедура перевірки складається з виділення із множини X^* точок із кращими значеннями критеріїв, ніж відповідні ефективні розв'язки області D_0.

Скоротимо в множині X^* точки, які гірші за знайдені до початку перевірки розв'язки: x_k^0, $x_{k(\min)}$, оптимальні або найгірші за будь-яким із критеріїв (2.2) в області D_0. Крім того, слід відкинути точки, що допустимі в D_0, оскільки вони самі або є ефективними розв'язками, або гірші за ефективні розв'язки області D_0.

Позначимо одержану після такого відсіву множину точок через X^{*H}.

Якщо $X^{*H} \neq \varnothing$, то кожну точку з X^{*H} необхідно порівняти з розв'язком задачі (2.13), що знайдений у напрямку пошуку за цією точкою.

Позначимо через X^{**}, $X^{**} \subset X^{*H}$ як множину кращих точок у X^{*H} порівняно з відповідними їм за напрямами пошуку ефективними розв'язками задачі (2.1), (2.2).

Якщо множина точок X^* збігається із множиною точок X^{**}, то очевидно, що реалізований перший варіант розміщення паралелепіпеда П відносно області D_0. Алгоритм системної оптимізації для цього випадку розглядався раніше.

Якщо $X^{*H} = \varnothing$ або $X^{**} = \varnothing$, то очевидно, що реалізований другий варіант, для якого немає необхідності розв'язувати задачу системної оптимізації. Оскільки для будь-якої точки паралелепіпеда П в області D_0 існуватимуть розв'язки із кращими значеннями за всіма критеріями одночасно.

Якщо $X^* \neq X^{**}$ і $X^{**} \neq \varnothing$, то реалізований третій варіант, тобто лише частина точок множини X^* краща за розв'язки області D_0. Процедура системної оптимізації для третього варіанта буде аналогічна з викладеною раніше процедурою для першого варіанта, з тією різницею, що зміни області D_0 мають здійснюватися відносно виділеної множини X^{**}. Позначимо $Q_0(X^{**})$ як множину індексів обмежень (2.1), порушених у точках X^{**}, P – як область обмежень типу (2.17), (2.18) на варіації параметрів обмежень (2.2) з номерами із $Q_0(X^{**})$. Якщо $P \cap P_0 \neq \varnothing$, то варіації параметрів знайдемо при розв'язуванні оптимізаційних задач вигляду (2.7) або (2.8) на області $P \cap P_0$. Визначимо величини нових параметрів для $i \in Q_0(X^{**})$ і сформулюємо нову область допустимих розв'язків D_1, аналогічну (2.19). Якщо $P \cap P_0 \neq \varnothing$, то необхідно або змінити обмеження P, або вибирати нові інтервали бажаних розв'язків.

Теорема 4. Якщо варіації параметрів обмежень (2.1) з індексами із множини $Q_0(X^{**})$ належать області $P \cap P_0$, то область D_1 містить усі точки $\bar{x}$ – паралелепіпеда П, для яких $f_i(\bar{x}) \geq f_i(\bar{x}_0), i \in I$ і хоча б одна нерівність строга, де $\bar{x}_0$ – знайдені розв'язки за допомогою (2.13) за точкою $w_i(\bar{x}_0)$.

Отже, згідно з теоремами 2–4 і твердженням 2, при зміні області D_0 відносно множини точок $X^*(X^{**})$ з використанням зазначених вище процедур будується нова область D_1, в якій завжди існуватимуть розв'язки із кращими або однаковими значеннями за всіма критеріями, ніж значення в точках бажаного інтервалу G.

2.6. Основні процедури системної оптимізації, що базуються на заданні інтервалів бажаних значень критеріїв

Нехай ОПР задає свої вимоги через деякі інтервали значень критеріальних функцій $\left[f_{i(H)}, f_{i(B)} \right]$, $i \in I$, тобто модель директив G у просторі перемінних визначатиметься у такий спосіб:

$$G = \{x : f_{i(H)} \le \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \le f_{i(B)},\ i \in I,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n\}. \quad (2.20)$$

Необхідно змінити вихідну область допустимих розв'язків D_0 із врахуванням заданих обмежень P на варіації параметрів і побудувати нову область D_1, в якій для будь-якого $x \in G$ зі значенням критеріїв із заданого діапазону існуватиме розв'язок x^k задачі (2.2), $x^k \in D_1$ такий, що $f_i(x^k) \ge f_i(x)$, $i \in I$.

Уважатимемо, що

$$\left[f_{i(H)}, f_{i(B)} \right] \subset \left[f_{i(\min)}, f_i^0 \right] \subset \left[f_{i(\min)}, f_i^0 \right], i \in I,$$

де $f_{i(\min)}$, f_i^0, $i \in I$ – визначені вище значення критеріїв.

Можливі такі три варіанти розміщення області зі значеннями критеріїв у заданих інтервалах $\left[f_{i(H)}, f_{i(B)} \right]$ відносно області D_0.

1. Якщо бажані інтервали задані таким чином, що виконуються співвідношення

$$f_i(x_{k(H)}) \le f_{i(H)},\ i \in I \quad (2.21),$$

і хоча б одна нерівність строга, де

$$x_{k(H)} = \arg \min_{x \in D_0} \max_{i \in I} \rho_{i(H)} w_i,$$

$w_i, i \in I$ – раніше введені перетворення на D_0, $\rho_{i(H)}, i \in I$, визначене за $w_i = w_i(f_{i(H)}), i \in I$, то при $G \ne \varnothing$, згідно з твердженням 4, усі розв'язки з G мають кращі значення за всіма критеріями, ніж відповідні їм ефективні розв'язки області D_0.

2. Якщо бажані інтервали задані у такий спосіб, що виконуються співвідношення

$$f_{i(B)} \le f_i(x_{k(B)}),\ i \in I \qquad (2.22)$$

і хоча б одна нерівність строга, де

$$x_{k(B)} = \arg \min_{x \in D_0} \max_{i \in I} \rho_{i(B)} w_i\ ,$$

$\rho_{i(B)}, \mathrm{i} \in I,$ визначено за $w_i = w_i(f_{i(B)}(x)), i \in I$, тоді, згідно із твердженням 5, усі значення із $\left[f_{i(H)}, f_{i(B)} \right],$ $i \in I,$ гірші за значення критеріальних функцій для відповідних їм розв'язків області D_0 .

3. Якщо співвідношення (2.21) і (2.22) одночасно не виконуються, то задані інтервали містять значення критеріїв ефективних розв'язків області D_0 і кращих за них, тобто система (2.20) сумісна.

Розглянемо процедуру системної оптимізації для першого варіанту розміщення області *G* відносно області D_0 .

Перевіримо систему нерівностей (2.20) на сумісність. Для цього можна скористатися різними методами. Застосуємо до області *G* процедуру *V* відсіювання свідомо неприпустимих розв'язків. У результаті або будуть побудовані інтервали змінних, яким належить область *G*, або буде встановлено, що система (2.20) несумісна.

Задамо довільні границі зміни кожної x_j , тобто $x_j \in [0, h_j]$, де h_j – довільне велике число. Нехай на (к)-му кроці застосування процедури *V* відсіювання свідомо неприпустимих розв'язків до області *G* отримані такі границі змінних:

$$h_{j(H)}^{(k)} \le x_j \le h_{j(B)}^{(k)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Границі на (*k*+1)-му кроці визначаються у такий спосіб:

$$h_{j(H)}^{k+1} = \max\{\max_{i \in I_j^-}\{\frac{1}{c_{ij}}(f_{i(B)} - \sum_{\substack{c \in I^+ i \\ c \ne j}} c_{ic} h_{c(H)}^{(k)} - \sum_{\substack{c \in I^- i \\ c \ne j}} c_{ic} h_{c(B)}^{(k)})\},$$

$$\max_{i\in I_j^+}\{\frac{1}{c_{ij}}(f_{i(H)}-\sum_{\substack{c\in I^+i\\ c\neq j}} c_{ic}h_{c(B)}^{(k)}-\sum_{\substack{c\in I^-i\\ c\neq j}} c_{ic}h_{(H)}^{(k)})\}, h_{j(H)}^{(k)}\},$$

$$h_{j(B)}^{k+1}=\min\{\min_{i\in I_j^-}\{\frac{1}{c_{ij}}(f_{i(H)}-\sum_{\substack{c\in I^+i\\ c\neq j}} c_{ic}h_{c(B)}^{(k)}-\sum_{\substack{c\in I^-i\\ c\neq j}} c_{ic}h_{c(H)}^{(k)})\},$$

$$\min_{i\in I_j^+}\{\frac{1}{c_{ij}}(f_{i(B)}-\sum_{\substack{c\in I^+i\\ c\neq j}} c_{ic}h_{c(H)}^{(k)}-\sum_{\substack{c\in I^-i\\ c\neq j}} c_{ic}h_{c(B)}^{(k)})\}, h_{j(B)}^{(k)}\},$$

$$I_i^+=\{j: j=\{1,...,n\}, c_{ij}>0, i\in I\}$$

$$I_i^-=\{j: j=\{1,...,n\}, c_{ij}<0, i\in I\}$$

$$I_j^+=\{i: i=\{1,...,n\}, c_{ij}>0, i\in I\}\,(2.23)$$

$$I_j^-=\{i: i=\{1,...,n\}, c_{ij}<0, i\in I\}.$$

Нехай процедура V зупинилась на l-му кроці і

$\Pi^{(l)}=\prod_{j=1}^{n}\left[h_{j(H)}^{(l)}, h_{j(B)}^{(l)}\right]$ – паралелепіпед, побудований за одержаними на цьому кроці діапазонами змінних. Зазначимо, що процедура V не приводить до зміни множини допустимих розв'язків системи (2.20), тобто $\Pi^{(l)}\supseteq G$.

Система нерівностей (2.20) несумісна, якщо виконується одна з таких умов: існує номер $i\in I$, для якого

$$\max_{x\in\Pi^{(l)}}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\le f_{i(H)},$$

існує номер $i\in I$, для якого (2.24)

$$\min_{x\in\Pi^{(l)}}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\ge f_{i(B)},$$

або для будь-якого $i\in I,$ для якого справедливі співвідношення

$$f_i(x_{k(H)}^{\Pi})\le f_{i(H)},$$

де $x_{k(H)}^{(\Pi)}=\arg\min_{x\in\Pi^{(l)}}\max_{i\in I}\rho_{i(H)}^{\Pi}w_i^{\Pi}$ і хоча б одна нерівність строга, w_i^{Π}, $i\in I$ – раніше введені перетворення, підраховані для паралелепіпеда $\Pi^{(l)}$, $\rho^{\Pi}_{i(H)}, i \in I$ – визначається за точкою $w_i^{\Pi} = w_i^{\Pi} = (f_{i(H)}), i \in I$.

Нехай відомо, що система (2.20) сумісна. Для того, щоб розв'язати цю задачу системної оптимізації, слід повторити викладену в 3.5. процедуру зміни області D_0 відносно паралелепіпеда $\Pi^{(l)}$ для першого варіанта розміщення $\Pi^{(l)}$ щодо D_0 (оскільки розглядається перший варіант розміщення G стосовно D_0 та $G \subseteq \Pi^{(l)}$). Тоді, згідно із твердженням 2 та теореми 3 або 4, для будь-якого $\bar{x} \in G$ у новій області D_1 знайдеться розв'язок зі значеннями, що кращі або однакові, ніж $f_i(\bar{x}),\ i \in I$ за всіма критеріями одночасно.

Якщо встановлюється, що система нерівностей (2.20) несумісна, то задані інтервали в просторі рішень пусті. У цьому випадку виникає необхідність управляти параметрами множини цільових функцій для того, щоб одержати не пусті інтервали в просторі розв'язків. Змінювати параметри множини цільових функцій будемо щодо розв'язків, що кращі стосовно розв'язування багатокритеріальних задач. Якщо несумісність системи (2.20) установлюється при виконанні співвідношень (2.24), то згідно із твердженням 3 це означає, що $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geq f_{i(H)}, i \in I$, $x_j \geq 0,\ j = 1,...,n$ – несумісна система, тобто не існує розв'язків, для яких значення за всіма критеріями одночасно були б більшими $f_{i(H)}, i \in I$. Тому в ролі точки, щодо якої можна розв'язувати задачу системної оптимізації множини цільових функцій, можна вибрати точку, яка покращує ефективні розв'язки множини D_0 у напрямі пошуку, який визначається за довільними значеннями $f_i \in \left[f_{i(H)}, f_{i(B)} \right], i \in I$. Наприклад, якщо $f_i(x^{\Pi}_{k(H)}) \geq f_i(x_{k(H)}),\ x^{\Pi}_{k(H)},\ x_{k(H)}$ – визначені вище та значення $f_i(x^{\Pi}_{k(H)})$, $i \in I$ влаштовують ОПР, то в ролі такої точки доцільно вибрати $x^{\Pi}_{k(H)}$, оскільки вона є кращою на паралелепіпеді $\Pi^{(l)}$ для множини критеріїв (2.2) і переваг $\rho_{i(H)}^{\Pi}$, визначених за $w_i^{\Pi} = w_i^{\Pi}(f_{i(H)}), i \in I$. Позначимо через I_0 – множину номерів нерівностей (2.22), які не виконуються в точці $x_{k(H)}^{\Pi}$. Тоді область зміни коефіцієнтів цільових функцій з індексами із множини I_0 і границь інтервалів значень критеріїв визначається за аналогією з областю (2.17), (2.18) у такий спосіб:

$$
\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} \Delta c_{ij} x_{ik(H)}^{\Pi} - \Delta f_{i(H)} \geq f_{i(H)} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{jk(H)}^{\Pi}, i \in I_0 \\
\sum_{j=1}^{n} \Delta c_{ij} x_{jk(H)}^{\Pi} - \Delta f_{i(B)} \leq f_{i(B)} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{jk(H)}^{\Pi}, i \in I_0 \\
\Delta c_{ij} > -c_{ij}, \text{ якщо } c_{ij} > 0, j \in I_i^{+} \\
\Delta c_{ij} < \left| c_{ij} \right|, \text{ якщо } c_{ij} < 0, j \in I_i^{-} \\
\Delta f_{i(H)} > -f_{i(H)}, i \in I_0 \\
\Delta f_{i(B)} > -f_{i(B)}, i \in I_0 .
\end{gathered}
\tag{2.25}
$$

Вибором варіацій $\Delta c_{ij}, j = 1,...,n, \Delta f_{i(H)}, \Delta f_{i(B)}, i \in I_0$ із області, що утворена системою (2.25) (позначимо P^c), завжди можна досягти того, що $P^c \cap P_0 \neq \varnothing$ (напр., якщо покласти $\Delta c_{ij} = 0$ і змінювати тільки $f_{i(H)}, f_{i(B)}, i \in I_0$).

Виберемо варіації параметрів Δc_{ij}, $j = 1,...,n$, $\Delta f_{i(H)}, \Delta f_{i(B)}$, $i \in I_0$ при розв'язуванні оптимізаційних задач вигляду (2.7) або (2.8) на області $P^c \cap P_0 \neq \varnothing$ і побудуємо нові інтервали $[\bar{f}_{i(H)}, \bar{f}_{i(B)}]$, $i \in I_0$, що утворюють сумісну систему $\bar{f}_{i(H)} \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{ij} x_j \leq \bar{f}_{i(B)}$, $i \in I_0$, де

$$
\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, i \in I \setminus I_0 \\ c_{ij} + \Delta c_{ij}, i \in I_0 \end{cases},
$$

$$\overline{f}_{i(H)} = \begin{cases} f_{i(H)}, & i \in I \setminus I_0 \\ f_{i(H)} + \Delta f_{i(H)}, & i \in I_0 \end{cases}, \quad \overline{f}_{i(B)} = \begin{cases} f_{i(B)}, & i \in I \setminus I_0 \\ f_{i(B)} + \Delta f_{i(B)}, & i \in I_0 \end{cases},$$

і містять бажані для ОПР значення критеріїв, стосовно яких слід здійснити системну оптимізацію області допустимих розв'язків D_0.

Якщо ж неможливо вибрати розв'язок, щодо якого доцільно розв'язувати задачу системної оптимізації множини цільових функцій (тобто або не існує розв'язків, кращих за ефективні розв'язки області D_0 у відповідних напрямах, що задані точками із інтервалів [$f_{i(H)}, f_{i(B)}$], $i \in I$, або ОПР не влаштовують нові границі інтервалів, які знайдені в результаті зміни параметрів), то ОПР має перезадати діапазони цільових установок.

Нехай реалізований другий варіант розміщення області G відносно області D_0. У цьому випадку не має необхідності розв'язування задачі системної оптимізації, оскільки для будь-якої точки області G в області D_0 існуватиме розв'язок із кращими значеннями за всіма критеріями одночасно.

Якщо реалізований третій варіант розміщення області G стосовно області допустимих розв'язків D_0, то необхідно за допомогою процедури V побудувати паралелепіпед П, який містить множину G. Оскільки реалізований третій варіант розміщення області G відносно D_0, то можливий тільки третій варіант розміщення П відносно D_0. Тому слід застосувати процедуру системної оптимізації для третього варіанта розміщення паралелепіпеда П стосовно D_0, що розглядалася в 2.5, заздалегідь виділивши на П точки вигляду X^{**}.

Тоді згідно із твердженням 2 при виконанні умов теореми 4 для будь-якого $x \in G$, кращого за відповідного йому ефективного розв'язку області D_0, у новій області D_1 знайдеться розв'язок із кращими значеннями за всіма критеріями одночасно.

Отже, викладені процедури дозволяють будувати нову область допустимих розв'язків D_1, в якій для будь-якого $x \in G$ існує розв'язок із кращими або однаковими значеннями за всіма критеріями.

2.7. Підходи до організації алгоритмів системної оптимізації відносно заданої дискретної множини бажаних розв'язків

Нехай модель цільових установок задана через дискретний набір бажаних розв'язків $G = X^g = \{x^l, l = 1,..., L\}$, що не належать вихідній області допустимих розв'язків D_0.

Будемо вважати, що всі точки з G мають кращі значення за множиною критеріїв порівняно з відповідними ефективними розв'язками області D_0. Припустимо також, що всі точки G множини не порівнювані за множиною критеріїв (2.2).

При заданні вимог через дискретну множину бажаних розв'язків X^g процедура системної оптимізації може бути основана на будь-якій із процедур, викладених у підрозд. 2.2, 2.4.–2.6. Приміром, можна застосувати до кожної точки множини X^g процедуру системної оптимізації, яка побудована для того випадку, коли вимоги ОПР виражені через конкретний розв'язок x^* (підрозд. 2.2), або визначити найменші інтервали, які містять усі точки множини X^g, і скористатися процедурами, що побудовані в підрозд. 2.5. Якщо множина X^g складається з невеликої кількості точок, то простішою в реалізації є перша процедура. Використання другої процедури доцільне при значній кількості точок множини X^g.

Обидві процедури забезпечують допустимість усіх точок множини X^g у новій області. Якщо для ОПР при заданні моделі $G = X^g$ важливо, щоб у новій області допустимих розв'язків існували розв'язки зі значеннями критеріїв, які не гірші за задані, то можна застосувати підхід до побудови процедури системної оптимізації, викладений у підрозд. 2.4 для випадку, коли вимоги ОПР виражені через конкретні бажані значення функцій: $f_i^* = \max_{x^l \in X^g} f_i(x^l), i \in I$.

Можна також використати процедуру системної оптимізації, побудовану в підрозд. 2.6, якщо вибрати в ролі нижніх і верхніх границь – найгірші й найкращі значення за кожним критерієм на множині X^g.

Розглянемо детальніше три такі процедури системної оптимізації, що основані на застосуванні вищеназваних підходів.

1. Застосуємо до точок множини X^g процедуру системної оптимізації, яка викладена в підрозд. 2.2 для задання вимог ОПР через конкретні розв'язки x^*. Виділяється номер обмежень (2.1), що порушується хоча б в одній точці множини X^g. Позначимо множину індексів порушених обмежень через $Q_0(X^g)$. Потім відбувається зміна області допустимих розв'язків D_0 за рахунок зміни обмежень з номерами із множини $Q_0(X^g)$. Для цього на варіації параметрів $\Delta a_{pj}, j=1,..,n, \Delta b_p, p \in Q_0(X^g)$ накладаються обмеження у вигляді (2.5), (2.6), де в ролі коефіцієнтів для кожного $p \in Q_0(X^g)$ обмеження використовуються точки множини X^g з максимальною мірою несумісності для $p \in Q_0(X^g)$ обмеження системи (2.1). Позначимо $x^p, p \in Q_0(X^g)$ – як точки, для яких порушуються обмеження.

Якщо відповідна область $P \cap P_0 \neq \varnothing$, то вибираючи з неї варіації вказаних параметрів, можна побудувати нову область D_1, якій належатимуть усі точки множини $x^l \in X^g$, і для будь-якого $x^l \in X^g$ у D_1 існуватиме розв'язок $x_k^l: \ f_i(x^l{}_k) \geq f_i(x^l), i \in I$.

2. Побудуємо в просторі змінних паралелепіпед:

$$\Pi = \prod_{j=1}^{n} [x_j(H), x_j(B)], \text{ який містить усі точки } X^g.$$

Оскільки всі точки із множини X^g кращі за відповідні ефективні розв'язки області D_0, то можливі тільки перший і третій варіанти розміщення паралелепіпеда П відносно області D_0. Далі застосуємо відповідну реалізованому варіанту процедуру зміни області D_0, що викладена в підрозд. 2.5. Тоді згідно із твердженням 2 і теоремами 3 або 4 всі точки множини

X^g будуть допустимими в новій області D_1 і для будь-якого $x^l \in X^g$ у D_1 знайдеться розв'язок із кращими значеннями за всіма критеріями одночасно.

Як було зазначено вище, така процедура системної оптимізації може бути використана в тому випадку, якщо число бажаних розв'язків у X^g велике ($L>>m$). Однак зауважимо, що здійснюване при цьому поглинання паралелепіпеда П може викликати значні зміни області D_0, що може не узгоджуватися із заданою з технологічних можливостей областю зміни параметрів P_0.

3. Виберемо в просторі значень критеріїв точку

$$f^* = \{ f_i^*, f_i^* = \max_{x^l \in X^g} f_i(x^l), i \in I \}.$$

Тоді всі розв'язки множини X^g матимуть значення критеріїв, гірші або рівні $f_i^*, i \in I$. Перевіримо систему

$$f_i^* \le \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^* x_j, i \in I, x_j \ge 0, j = 1,...,n \qquad (2.26)$$

на сумісність за допомогою процедури V відсіювання свідомо неприпустимих розв'язків.

Якщо система (2.26) сумісна, то можна знайти її допустимий розв'язок:

$$x^{*k} = \arg\min\max \rho_i^* w_i^{\Pi},$$

де $\Pi^{(l)}$ – паралелепіпед, який містить область змінних (2.26) і побудований у результаті застосування процедури V, ω_i^{Π}, $i \in I$ – раніше введені перетворення на $\Pi^{(l)}$, ρ_i^*, $i \in \Pi$ – напрям пошуку розв'язку, що визначений за точкою $\omega_i^{\Pi} = \omega_i^{\Pi}(f_i^*)$, $i \in I$.

Точка x^{*k} не належить D_0 і згідно зі способом вибору $f_i(x^{*k}) \ge f(x^l)$, $i \in I$ для будь-якого $x^l \in X^g$. Тому можна застосувати процедуру системної оптимізації, розглянуту в підрозд. 2.2, для того випадку, коли вимоги ОПР виражені через бажаний розв'язок $x^* = x^{*k}$.

Якщо $P \cap P_0 \neq \varnothing$, де P – область типу (2.5), (2.6) на варіації параметрів обмежень (2.1), порушених у точці x^{*k}, то в новій області завжди існуватимуть розв'язки зі значеннями критеріїв кращими або рівними f_i^*, $i \in I$, тобто кращими або рівними значеннями критеріїв для будь-якого розв'язку із заданої множини X^g. Однак зазначимо, що описана процедура не гарантує допустимості всіх точок множини X^g у новій області D_1.

Зауваження. Якщо система (2.26) несумісна, то неможливо вибрати розв'язок зі значеннями критеріїв одночасно більшими або рівними найкращим значенням критеріїв для точок множини X^g і скористатися такою процедурою системної оптимізації не можливо.

Усі вищеописані процедури системної оптимізації розглянуті для випадку, коли область $P \cap P_0 \neq \varnothing$. Якщо $P \cap P_0 = \varnothing$, тоді необхідно або змінити область P_0, або задавати відповідно нові інтервали бажаних розв'язків $[x_{j(H)}, x_{j(B)}]$, $j = 1,...,n$, нові інтервали бажаних значень критеріїв $[f_{j(H)}, f_{j(B)}]$, $i \in I$, нову дискретну множину бажаних розв'язків X^g, для яких $P \cap P_0 \neq \varnothing$.

Викладені в підрозд. 2.2–2.7 алгоритми системної оптимізації здійснюють зміни параметрів області допустимих розв'язків D_0 задачі багатокритеріальної оптимізації (2.1), (2.2) відповідно до способу задання моделі цільових установок у напрямі покращення значень критеріїв (без зміни області варіацій параметрів P_0 і перезадавання ОПР своїх вимог).

2.8. Процедури системної оптимізації відносно заданої директивної області

Розглянемо систему, описану в класі багатокритеріальних задач лінійного програмування (2.1), (2.2). Цільові функції (2.2) становлять інтереси системи, а обмеження (2.1) утворюють допустиму область D_0, визначають її структуру й можливості.

Як зауважувалось раніше, у реальних багаторівневих системах задані моделі ЦУ можуть задаватись ОПР самої системи або ОПР систем вищого рівня.

Нехай ОПР вищого рівня задає свої вимоги у вигляді деякої області $G \neq \varnothing$:

$$G = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{g} x_j \leq b_i^{g}, x_j \geq 0, i \in I^{q} = \{1,...,k\}, j = 1,...,n \right\}, \quad (2.27)$$

яка несумісна з допустимою областю D_0, тобто $G \cap D_0 = \varnothing$. Уважатимемо, що є можливість змінити параметри допустимої області D_0.

$G \cap D_0 = \varnothing$ означає, що структура й можливості системи не задовольняють моделі ЦУ і необхідно змінити параметри обмежень, які утворюють допустиму область D_0, з метою задоволення вимог ОПР.

Якщо директивна область визначається ОПР системи, то залежно від способу її задавання для розв'язування задачі системної оптимізації можна використати алгоритми, що рекомендуються в підрозд. 2.2–2.7. Ця можливість пояснюється тим, що дії ОПР повністю підлягають інтересам системи в досягненні покращених показників на заданій множині критеріїв. Тому слід задовольнити тільки ті вимоги ОПР, які приводять до покращення значень за всіма критеріями одночасно.

Коли директивна область задається ОПР вищого рівня, то вона може не узгоджуватися з інтересами системи. У такому випадку слід задовольняти вимоги ОПР із врахуванням їхньої узгодженості з інтересами системи, що приводить до необхідності розробляти відповідне алгоритмічне забезпечення для розв'язування задач системної оптимізації із вказаною специфікою. Цій проблемі й присвячений розділ.

Такі задачі (залежно від того, чи узгоджуються вимоги ОПР і інтереси системи чи ні) можна розв'язувати різними способами.

На першому етапі розв'язування задачі системної оптимізації будемо визначати, який із можливих варіантів взаємовідношень значень критеріїв множини (2.2) на директивній G і допустимій D_0 областях реалізувався. Як і раніше, уважатимемо, що значення критеріїв, які відповідають вимогам ОПР, мають належати найбільшим діапазонам зміни критеріальних функцій, тобто $f_i(x) \in [f_i^0, f_i(\min)]$, $i \in I$ для кожного $x \in G$, де f_i^0, $i \in I$ і $f_i(\min)$, $i \in I$ – описані вище. Це дає можливість для довільної точки X^g із директивної області G визначити вектор переваг ρ^g за точкою $\omega_i^g = \omega_i\left(f_i\left(x^g\right)\right)$, $i \in I$, де $\omega_i\left(f_i\left(x\right)\right)$, $i \in I$ – раніше введені перетворення критеріїв, і знайти на вихідній допустимій області ефективне розв'язання $x_\partial^g = \arg\min\limits_{x \in D_0} \max\limits_{i \in I} \rho_i^g \omega_i(x)$, для якого або $f_i(x^g) \geq f_i(x_\partial^g)$ для всіх $i \in I$, або $f_i(x^g) \leq f_i(x_\partial^g)$ для всіх $i \in I$.

Сформулюємо теорему, яка дозволить виділити можливі варіанти взаємовідношень директивних вимог й інтересів системи.

Теорема 5. Нехай виконуються умови

1. $G \cap D_0 = \varnothing$.
2. $f_i(\bar{x}) \in [f_i^0, f_i(\min)]$, $i \in I$, для будь якого $\bar{x} \in D_o$.

Якщо для деякого $X^g \in G$ справедливо

$$f_i(x^g) \geq f_i(x_\partial^g),\ i \in I \tag{2.28}$$

то для будь-якого $\in G$ будуть справедливі відношення

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(\bar{x}_\partial),\ i \in I.$$

Якщо при виконанні перших двох умов для деякого $x^g \in G$ справедливо

$$f_i(x^g) \leq f_i(x_\partial^g),\ i \in I, \tag{2.29}$$

то для будь-якого $\bar{x} \in G$ будуть справедливі співвідношення $f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}_\partial)$, $i \in I$, де $\bar{x}_\partial = \arg\min\limits_{x \in D_0} \max\limits_{i \in I} \bar{\rho}_i\ \omega_i$, $\bar{\rho}_i$, $i \in I$ – вектор переваг, визначений за точкою $\omega_i\left(f_i\left(\bar{x}\right)\right)$, $i \in I$.

Теорема 5 дозволяє визначити два варіанти взаємовідношень директивних вимог та інтересів системи.

1. Усі точки директивної області G мають кращі значення за всіма критеріями одночасно порівняно з відповідними їм ефективними розв'язками допустимої області D_0, тобто вимоги ОПР повністю узгоджуються з інтересами розглядуваної системи.

2. Для будь-якої точки G у допустимій області D_0 існує розв'язок із кращими значеннями за всіма критеріями одночасно, тобто вимоги ОПР не узгоджуються з інтересами розглядуваної системи.

Перевірити, який із варіантів реалізований, можна у такий спосіб. Якщо в деякій точці директивної області виконується умова (2.28), то реалізований перший варіант, якщо ж справедливі співвідношення (2.29) – то другий.

При реалізації першого варіанту задоволення вимог ОПР, визначених будь-якою точкою моделі директив, приведе до одночасного покращення значень критеріїв деякої множини ефективних розв'язків вихідної допустимої області. Отже, при виконанні директивних вимог автоматично враховуються інтереси системи. Тому на наступних етапах розв'язування задачі системної оптимізації необхідно таким чином змінити область D_0 із врахуванням заданих обмежень P_0 на варіації її параметрів, щоб всі точки множини G або у крайньому випадку деякі її підмножини належали новій допустимій області D_1.

У другому варіанті задоволення вимог ОПР, визначених будь-якою точкою директивної області, призведе до одночасного погіршення значень критеріїв. Тому задоволення всіх директивних вимог або деякої їхньої частини в цьому випадку не має сенсу. Далі достатньо визначити одну з ефективних точок G з найбільш бажаними для ОПР значеннями цільових функцій і виділити тільки ті обмеження, які треба змінити, щоб ця точка стала допустимою. А потім потрібно здійснити процедуру забезпечення сумісності системи (2.1) відносно цієї точки за рахунок зміни суттєвих обмежень у D_0.

Розглянемо процедуру виділення суттєвих обмежень (етап 3), коли реалізований перший варіант взаємовідношень допустимої D_0 та директивної G областей взаємовідношень за множиною критеріїв (2.2). Обмеження, наявність яких не впливає на сумісність системи (2.1), (2.27), будемо називати несуттєвими.

Для розділення множини обмежень (2.1) на суттєві й несуттєві застосуємо до області G процедуру V послідовного аналізу й відсіювання завідома недопустимих у G розв'язків.

Нехай $\Pi^{(0)} = \prod_{j=1}^{n}[h_{j(h)}^{g(0)}, h_{j(B)}^{g(0)}]$ – деякий початковий паралелепіпед, $h_{j(h)}^{g(0)}$, $h_{j(B)}^{g(0)}$ – його границі, $\Pi^{(k)} = \prod_{j=1}^{n}[h_{j(h)}^{g(k)}, h_{j(B)}^{g(k)}]$ – паралелепіпед, одержаний на *к*-тому кроці V.

Тоді границі інтервалів зміни розв'язків на (к+1) – кроці, що утворюють паралелепіпед $\Pi^{(k+1)} = \prod_{j=1}^{n}[h_{j(h)}^{g(k+1)}, h_{j(B)}^{g(k+1)}]$, визначаються за такими формулами:

$$h_{j(H)}^{g(k+1)} = \max\left\{ \max_{i\in I_j^{g-}} \left(\frac{1}{a_{ij}^g}\Big(b_i^g - \sum_{\substack{l\in I_i^{g+}\\ l\neq j}} a_{il}^g h_{l(H)}^{g(K)} - \sum_{\substack{l\in I_i^{g-}\\ l\neq j}} a_{il}^g h_{l(B)}^{g(K)}\Big)\right), h_{j(H)}^{g(K)} \right\},$$

$$h_{j(B)}^{g(k+1)} =$$

$$= \min\left\{ \min_{i\in I_j^{g+}} \left(\frac{1}{a_{ij}^g}\Big(b_i^g - \sum_{\substack{l\in I_i^{g+}\\ l\neq j}} a_{il}^g h_{l(H)}^{g(K)} - \sum_{\substack{l\in I_i^{g-}\\ l\neq j}} a_{il}^g h_{l(B)}^{g(K)}\Big)\right), h_{j(B)}^{g(K)} \right\}, \qquad (2.30),$$

де
$$I_j^{g+} = \left\{ i : i \in I^g, a_{ij}^g > 0, j = 1,...,n \right\};$$

$$I_j^{g-} = \left\{ i : i \in I^g, a_{ij}^g < 0, j = 1,...,n \right\};$$

$$I_i^{g+} = \left\{ j : j \in \{1,...,n\} \, a_{ij}^g > 0, i \in I^q \right\};$$

$$I_i^{g-} = \left\{ j : j \in \{1,...,n\} \, a_{ij}^g < 0, i \in I^q \right\};$$

$$I_j^{g+} \cup I_j^{g-} = I^g, \; I_i^{g+} \cup I_i^{g-} = \{1,...,n\}.$$

Для к = 0,1,2,... одержимо систему вкладених один у другий паралелепіпедів

$$\Pi^{(0)} \supseteq \Pi^{(1)} \supseteq ... \supseteq \Pi^{(k)} \supseteq \Pi^{(k+1)} \supseteq ...;$$

$$\left. \begin{array}{l} h_{j(H)}^{g(0)} \le h_{j(H)}^{g(1)} \le \ldots \le h_{j(H)}^{g(k)} \le h_{j(H)}^{g(k+1)} \le \ldots \\ h_{j(B)}^{g(0)} \ge h_{j(B)}^{g(1)} \ge \ldots \ge h_{j(B)}^{g(k)} \ge h_{j(B)}^{g(k+1)} \ge \ldots \end{array} \right., \quad j = 1,\ldots,n .$$

Із формул перерахунку границь (2.29) випливає, що відсіюються такі інтервали, як $\left[h_{j(B)}^{g(k+1)}, h_{j(B)}^{g(k)} \right], \left[h_{j(H)}^{g(k)}, h_{j(H)}^{g(k+1)} \right]$, яким не можуть належати значення компонент розв'язків директивної області G. Отже, на будь-якому кроці к = 0,1,… процедура V не змінить множини G, тобто $\Pi^{(k)} \supseteq G$.

Якщо на деякому кроці $l : \Pi^{(k)} = \Pi^{(k+1)}$, тоді подальше застосування процедури не приведе на наступних кроках до скорочення інтервалів. Як зауважувалось у підрозд. 2.4, при численній реалізації процедури V через округлювання помилок доцільно вважати $\Pi^{(k)} = \Pi^{(k+1)}$, якщо

$$\| \Pi^{(k)} - \Pi^{(k+1)} \| = \max(h_{j(H)}^{g(k+1)} - h_{j(H)}^{g(k)}, h_{j(B)}^{g(k)} - h_{j(B)}^{g(k+1)}) \le \varepsilon ,$$

де $\varepsilon > 0$ – наперед задане число.

Нехай $l = \min \left\{ k : \Pi^{(k)} = \Pi^{(k+1)} \right\}$. Позначимо

$$\Pi^G = \Pi^{(l)} = \prod_{j=1}^{n} \left[h_{j(H)}^{g}, h_{j(B)}^{g} \right], \quad h_{j(B)}^{g} = h_{j(B)}^{g(l)}, \; h_{j(H)}^{g} = h_{j(H)}^{g(l)},$$
$$j = 1,\ldots,n .$$

Оскільки система (2.29) сумісна за умовою, то $\Pi^G \neq \varnothing$.

Щодо побудованого паралелепіпеда Π^G, який містить директивну область G, проведемо розподіл обмежень системи (2.1) на суттєві й несуттєві. Для цього визначимо для кожного обмеження, що утворює область D_0, максимум і мінімум його лівої частини на паралелепіпеді Π^G:

$$\max_{x \in \Pi^G} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{0} x_j , \; i \in Q \tag{2.31}$$

$$\min_{x \in \Pi^G} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{0} x_j , i \in Q . \qquad (2.32).$$

Компоненти оптимальних розв'язків задач (2.31) рівні:

$$\underline{x}_j^i = \begin{cases} h_{j(B)}^{g(l)}, a_{ij}^o > 0, \\ h_{j(H)}^{g(l)}, a_{ij}^o < 0, \end{cases} \quad j = 1,...,n\,,\ i \in Q\,,$$

компоненти оптимальних розв'язків задач (2.32):

$$\overline{x}_j^i = \begin{cases} h_{j(H)}^{g(l)}, a_{ij}^o > 0, \\ h_{j(B)}^{g(l)}, a_{ij}^o < 0, \end{cases} \quad j = 1,...,n\,,\ i \in Q\,.$$

Нехай для *i*-го обмеження системи (2.1) виконується умова:

$$\max_{x \in \Pi^G} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j < b_i^0\,, \tag{2.33}$$

або:

$$\min_{x \in \Pi^G} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j > b_i^0\,. \tag{2.34}$$

Це означає, що для будь-якого $x \in \Pi^G$, і оскільки $G \subseteq \Pi^G$, то і для будь-якого $x \in G$ справедливо. Відповідно,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j < b_i^0 \quad \text{або} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j > b_i^0\,.$$

Тому, якщо для деякого $i \in Q$ виконується умова (2.33), то це обмеження несуттєве, тобто наявність його не впливає на сумісність системи (2.27).

Якщо ж справедливі умови (2.34), то обмеження суттєве, тобто для досягнення сумісності системи (2.1), (2.27) необхідно змінити його параметри. Позначимо Q^C і Q^H – як множину індексів суттєвих і несуттєвих обмежень системи (2.1), $Q^H \cup Q^C = Q$.

Виділимо суттєві й несуттєві обмеження системи (3.1), перевіряючи умови (2.33) і (2.34) на паралелепіпеді Π^G. Нехай $Q^{C(0)}$ і $Q^{H(0)}$, відповідно, множина їхніх індексів $Q^{C(0)} \subseteq Q^C$, $Q^{H(0)} \subseteq Q^H$.

Якщо $Q^0 = Q \setminus (Q^{H(0)} \cup Q^{C(0)}) = \varnothing,$ то виділені всі суттєві обмеження (2.1), тобто $Q^C = Q^{C(0)}$, $Q^H = Q^{H(0)}$ і задача 1 розв'язана.

Якщо $Q^0 = (Q^{H(0)} \cup Q^{C(0)}) \neq \varnothing,$ то не всі обмеження системи (2.1) розподілені на суттєві й несуттєві. У такій ситуації, якщо необхідно побудувати нову допустиму область D_1, що містить усю задану множину G, та $P_0^i \neq \varnothing$ для будь-якого $i \in Q^0$, віднесемо обмеження з індексами із множини Q^0 до суттєвих, тобто $Q^C = Q^0 \cup Q^{C(0)}, Q^H = Q^{H(0)}$ і на цьому процедура третього етапу розв'язування задачі системної оптимізації закінчить свою роботу.

Нехай потрібно лише, щоб нова область D_1 містила деяку підмножину директивної області, що належить відповідному паралелепіпеду. Здійснимо згідно з (2.33), (2.34) визначення на ньому суттєвих і несуттєвих обмежень системи (2.1). У результаті відносно деякої підмножини області G усі обмеження (2.1) будуть розділені на суттєві й несуттєві.

Звернемось до детальнішого опису процедури виділення суттєвих обмежень у цьому випадку. Будемо вважати процес побудови паралелепіпеда Π^G нульовим кроком процедури. Позначимо $\Pi^{G(0)} = \Pi^G$ – як паралелепіпед нульового кроку $Q^{C(0)}$, $Q^{H(0)}$ – як множину індексів суттєвих і несуттєвих обмежень, виділених з використанням Π^G.

На кожному наступному (к+1)-ому кроці, к = 0,1,… будемо застосовувати процедуру V до $\Pi^{G(k)}$ і системи невиділених до цього кроку обмежень, індекси яких утворюють множину $Q^{(k)}$, $Q^k = Q \setminus (Q^{C(k)} \cup Q^{H(k)})$. Границі $h_{j(H)}^{g'(K)}, h_{j(B)}^{g'(K)}$ паралелепіпеда, який будується при цьому, позначимо у такий спосіб: $\Pi^{G'(k+1)}$. Вони визначаються за такими формулами:

$$h_{j(H)}^{g'(k+1)} = \max\left\{ \max_{i \in I_j^-} \left(\frac{1}{a_{ij}^0}\Big(b_i^0 - \sum_{\substack{l \in I_i^+ \\ l \neq j}} a_{il}^0 h_{l(H)}^{g(K)} - \sum_{\substack{l \in I_i^- \\ l \neq j}} a_{il}^0 h_{l(B)}^{g(K)}\Big)\right), h_{j(H)}^{g(K)} \right\},$$

$$h_{j(B)}^{g'(k+1)} = \min\left\{ \min_{i \in I_j^+} \left(\frac{1}{a_{ij}^0} \left(b_i^0 - \sum_{\substack{l \in I_i^+ \\ l \neq j}} a_{il}^0 h_{l(H)}^{g(K)} - \sum_{\substack{l \in I_i^- \\ l \neq j}} a_{il}^0 h_{l(B)}^{g(K)} \right) \right), h_{j(B)}^{g(K)} \right\},$$

$$I_j^+ = \left\{ i : i \in Q^{(K)}, a_{ij}^0 > 0,\ j = 1,...,n \right\},$$

$$I_j^- = \left\{ i : i \in Q^{(K)}, a_{ij}^0 < 0,\ j = 1,...,n \right\}$$

$$I_i^+ = \left\{ j : j \in \{1,...,n\}, a_{ij}^0 > 0, i \in Q^{(K)} \right\},$$

$$I_i^- = \left\{ j : j \in \{1,...,n\}, a_{ij}^0 < 0, i \in Q^{(K)} \right\},$$

$$I_j^+ \cup I_j^- = Q^{(K)},\ I_i^+ \cup I_i^- = \{1,...,n\}.$$

Оскільки процедура V застосовується до $\Pi^{G(K)}$ і обмежень $i \in Q^{(k)}$ допустимої області, що утворюють несумісну систему з директивною областю, то поряд зі скороченням паралелепіпеда $\Pi^{G(K)}$ відсіюються і розв'язки директивної області, які містяться в ньому. Тому на кожному кроці після визначення $\Pi^{G'(K+1)}$ необхідна перевірка системи $\Pi^{G'(K+1)} \cap G$ на сумісність. Для встановлення сумісності або несумісності знову застосуємо процедуру V до $\Pi^{G'(K+1)}$ і G ($i \in I_q$). При цьому отримуємо паралелепіпед $\Pi^{G(K+1)} \subseteq \Pi^{G'(K+1)}$ із границями $h_{j(H)}^{g(k+1)}$, $h_{j(B)}^{g(k+1)}$, $j = 1,...,n,$ знайденими за формулами (2.30), в яких $h_{j(H)}^{g(k)} = h_{j(H)}^{g'(k+1)}$, $h_{j(B)}^{g(k)} = h_{j(B)}^{g'(k+1)}$. Якщо система $\Pi^{G'(K+1)} \cap G$ сумісна, то на паралелепіпеді $\Pi^{G'(K+1)}$ (який містить підмножину директивної області, позначимо її $G^{(K+1)} = \Pi^{G'(K+1)} \cap G$) за допомогою умов (2.33), (2.34) визначаються невиділені для цього кроку суттєві й несуттєві обмеження і формуються множини

$Q^{(k+1)} \subseteq Q^{(k)}$, $Q^{C(k+1)} \supseteq Q^{C(k)}$, $Q^{H(k+1)} \supseteq Q^{H(k)}$. Якщо множина $Q^{(k+1)} \neq \varnothing$, то здійснюється перехід на наступний (к+2)-й крок, який будується аналогічно описаному вище (к+1)-му кроку.

У результаті одержуємо систему вкладених один в одного паралелепіпедів:

$$\Pi^{G(0)} \supseteq \Pi^{G'(1)} \supseteq \Pi^{G(1)} \supseteq ... \supseteq \Pi^{G'(k)} \supseteq \Pi^{G'(k+1)} \supseteq \Pi^{G(k+1)} ... \supseteq,$$

систему підмножин директивної області

$$G \supseteq G^{(1)} \supseteq ... \supseteq G^{(k)} \supseteq G^{(k+1)} \supseteq, ..., G^{(k)} \supseteq \Pi^{G'(k)},$$

а також відповідних множин індексів обмежень допустимої області

$$Q^{(0)} \supseteq Q^{(1)} \supseteq ... \supseteq Q^{(k)} \supseteq Q^{(k+1)} \supseteq ...$$

$$Q^{c(0)} \subseteq Q^{c(1)} \subseteq ... \subseteq Q^{c(k)} \subseteq Q^{c(k+1)} \subseteq ...$$

$$\ldots Q^{H(k)} \subseteq Q^{H(k+1)} \subseteq \ldots$$

Процедура розв'язування задачі виділення суттєвих обмежень закінчує роботу, якщо на деякому кроці L виконується одна з таких умов:

1. $Q^{L} = \varnothing,$ тобто виділені всі суттєві обмеження в (2.1), тоді

$$Q^{C} = Q^{C(L)}, Q^{H} = Q^{H(L)}.$$

2. $\Pi^{G(L-1)} = \Pi^{G'(L)}$ або $\Pi^{G'(L)} = \Pi^{G(L)}$, тобто не всі обмеження системи (2.1) розділені на суттєві й несуттєві, а скорочень паралелепіпедів більше не відбувається. У цьому випадку можливі дві ситуації.

2.1. Система обмежень із множини $I^{q} \cup Q^{(L-1)}$ сумісна на $\Pi^{G'(L-1)}$, або система обмежень з індексами із множини $I^{q} \cup Q^{(L)}$ сумісна на $\Pi^{G'(L)}$. Тоді можна віднести обмеження з номерами із множини $Q^{(L-1)}$ або $Q^{(L)}$ до несуттєвих: $Q^{C} = Q^{C(L-1)}$, $Q^{H} = Q^{H(L-1)} \cup Q^{(L-1)}$ або, відповідно, $Q^{C} = Q^{C(L)}$, $Q^{H} = Q^{H(L)} \cup Q^{(L)}$.

2.2. Система обмежень з номерами із множини $I^{q} \cup Q^{(L-1)}$ несумісна на $\Pi^{g(L-1)}$ або система обмежень з номерами із множини $I^{q} \cup Q^{(L)}$ несумісна на $\Pi^{g(L)}$. Тоді можна вважати обмеження з індексами із множини $Q^{(L-1)}$ або із множини

$Q^{(L)}$ суттєвими, тобто $Q^C = Q^{C(L-1)} \cup Q^{(L-1)}, Q^H = Q^{H(L-1)}$ чи $Q^C = Q^{C(L)} \cup Q^{(L)}, Q^H = Q^{H(L)}$.

3. $\Pi^{g'(L)} \cap G = \varnothing$.

Виконання такої умови означає, що паралелепіпед $\Pi^{G(L-1)}$ не містить точок директивної області. Тоді слід повернутися на попередній крок, на якому система $\Pi^{G'(L-1)} \cap G$ сумісна. Якщо $\Pi^{g(L)} \cap G \neq \varnothing$, то на паралелепіпеді $\Pi^{G(L-1)}$ за допомогою умов (2.33), (2.34) виділимо із обмежень $Q^{(L-1)}$ суттєві й несуттєві та сформуємо множини $Q^{(L)}$, $Q^{C(L)}$, $Q^{H(L)}$. При цьому можливі три випадки.

3.1. $Q^{(L)} = \varnothing$, тобто $Q^C = Q^{C(L)}$, $Q^H = Q^{H(L)}$.

3.2. $Q^{(L)} \neq \varnothing$ і система обмежень з індексами із множини $I^q \cup Q^{(L)}$ сумісна на $\Pi^{\Pi(L-1)}$. Тоді можна вважати обмеження з номерами із множини $Q^{(L)}$ несуттєвими, тобто $Q^C = Q^{C(L)}$, $Q^H = Q^{H(L)} \cup Q^{(L)}$.

3.3. $Q^{(L)} \neq \varnothing$ і система обмежень $I^q \cup Q^{(L)}$ несумісна на $\Pi^{G(L-1)}$. Тоді можна віднести обмеження з номерами із множини $Q^{(L)}$ до суттєвих, тобто $Q^C = Q^{C(L)} \cup Q^{(L)}$, $Q^H = Q^{H(L)}$.

4. $\Pi^{G(L)} = \varnothing$ – це значить, що паралелепіпед $\Pi^{G(L-1)}$ не містить точок, що утворюються обмеженнями з індексами із множини $Q^{(L-1)}$. Отже, усі обмеження з номерами із множини $Q^{(L-1)}$ можна вважати суттєвими, тобто $Q^C = Q^{C(L-1)} \cup Q^{(L-1)}$, $Q^H = Q^{H(L-1)}$.

У результаті відносно підмножини директивної області, яка міститься в побудованому на останньому кроці паралелепіпеді, усі обмеження системи (2.1) розділяються на суттєві й несуттєві. Тобто, для першого варіанта задача розв'язана.

Нехай реалізований другий варіант взаємовідношень за множиною критеріїв (2.2) розв'язків допустимої та директивної областей. Розглянемо процедуру виділення суттєвих обмежень у цьому випадку. Виходячи зі специфіки реалізованого варіанта, немає сенсу у визначенні всіх суттєвих обмежень системи (2.1), зміна яких необхідна для задоволення будь-якої з директивних вимог. Достатньо виділити тільки ті обмеження в D_0, які не дозволяють задовольнити одну з ЦУ із G, що не покращується за множиною критеріїв $f_i(x), i \in I$ з найбільш бажаними для ОПР їхніми значеннями.

Скористаємося можливістю залучення ОПР для виділення такого розв'язку з директивної області. З цією метою ОПР слід задати переваги ρ_i^g, $i \in I$ на множині цільових функцій (2.2). Це дозволяє визначити ефективний розв'язок x_∂^g із G, що відповідний перевагам ρ_i^g, $i \in I$. Нехай

$x_\partial^g = \arg\min\limits_{x \in G} \max\limits_{x \in I} \rho_i^g \omega_i^g$, де ω_i^g , $i \in I$ – уведені раніше перетворення критеріїв, підраховані для області G. Якщо значення критеріїв, які досягнені в цій точці, бажані для ОПР, то, природно, що обмеження, які виконуються в точці x_∂^g, будуть несуттєвими, а ті, що не виконуються в x_∂^g – суттєвими для задоволення директивних вимог, тобто

$$Q^C = \left\{ i : i \in Q, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_\partial^o > b_i^0 \right\},$$

$$Q^H = \left\{ i : i \in Q, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_\partial^o \le b_i^0 \right\}.$$

Отже, для другого варіанта задача розв'язана.

Для виконання подальших етапів розв'язування задачі системної оптимізації із врахуванням першого варіанта вказується множина індексів Q^C суттєвих обмежень і паралелепіпед. Для простоти позначимо його П, на якому цю множину виділено.

Для здійснення наступних етапів розв'язування задач системної оптимізації із врахуванням другого варіанта також указується множина індексів Q^C і бажана для ОПР точка x_∂^g, за допомогою якої цю множину виділено.

Побудуємо область P варіацій параметрів суттєвих обмежень (2.1), при виборі варіації з якої можна досягти сумісності допустимої області D_0 і директивної області G (етап 4).

Будемо вважати, що для всіх суттєвих обмежень допустимої області D_0 з номерами $i \in Q^C$ виконується $P_0^i \neq \varnothing$. Якщо директивні вимоги й інтереси розглядуваної системи узгоджуються (реалізований перший варіант), то для побудови області P визначимо на паралелепіпеді П, за допомогою якого були виділені суттєві обмеження Q^C, множини точок X^{*g} вигляду (2.16), тобто

$$X^{*g} = \left\{ x^{*i}, i \in Q : x^{*i} = \arg\max_{x \in \Pi} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j , x^{*i} = (x_1^{*i}, ..., x_n^{*i}) \right\}.$$

Сформулюємо P, накладаючи на варіації $\Delta a_{ij}, \Delta b_i, i \in Q^C$, $j = 1,...,n$ параметрів a_{ij}^0, b_i^0, $i \in Q^C, j = 1$,…, n обмежень з індексами із множини такі умови:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} \Delta a_{ij}^0 x_j^{*i} - \Delta b_i \le b_i^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 x_j^{*i},\ i \in Q^C, \\ \Delta b_i < | b_i^0 |, \text{ якщо } b_i^0 < 0, \\ \Delta b_i > - b_i^0 , \text{ якщо } b_i^0 > 0,\ i \in Q^C \\ \Delta a_{ij} > - a_{ij}^0 , \text{ якщо } a_{ij}^0 > 0,\ j = 1,...,n \\ \Delta a_{ij} < | a_{ij}^0 | , \text{ якщо } a_{ij}^0 < 0,\ j = 1,...,n . \end{gathered} \tag{2.35}$$

Якщо директивні вимоги й інтереси розглядуваної системи не узгоджуються (реалізований другий варіант), то накладемо на варіації Δa_{ij}, Δb_i, $i \in Q^C$, $j = 1,...,n$ параметрів обмежень з індексами із множини Q^C, що порушуються в точці x_∂^g директивної області, такі умови

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta a_{ij}^{0} x_{j\partial}^{g} - \Delta b_i \le b_i^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{0} x_{j\partial}^{g},\ i \in Q^C$$

$$\Delta b_i > -b_i^0 \text{, якщо } b_i^0 > 0,$$

$$\Delta b_i < |b_i^0| \text{, якщо } b_i^0 < 0, \qquad (2.36)$$

$$\Delta a_{ij} < |a_{ij}^0| \text{, якщо } a_{ij}^0 < 0,\ j = 1,...,n,$$

$$\Delta a_{ij} > -a_{ij}^0 \text{, якщо } a_{ij}^0 > 0,\ j = 1,...,n.$$

Як було показано вище, якщо $P \cap P_0 \neq \varnothing$, то при виборі нових параметрів в області $P \cap P_0$ гарантується, що нова множина допустимих розв'язків D_1 матиме всі точки директивної області, що належать паралелепіпеду П (коли область P побудована за формулами (2.35)), або, у крайньому випадку, точку x_∂^g (коли область Р побудована за формулами (2.36)).

Висновки. Алгоритмічне забезпечення технології системної оптимізації дозволяє суттєво розширити практичне застосування методів математичного програмування, у тому числі багатокритеріальної оптимізації (передусім, для економічних задач). Це забезпечує:

- по-перше, можливість не тільки розв'язати поставлену задачу, а й формувати управлінські дії (рішення) на базі глибокого неформального аналізу середовища функціонування розглядуваного об'єкта;
- по-друге, цілеспрямоване узгодження множини допустимих розв'язків з цільовими установками ОПР і реальними можливостями розв'язуваної задачі;
- по-третє, узгодження розв'язку з багаторівневим середовищем його реалізації. Ефективність даного підходу підтверджується практикою розроблення процедур прийняття рішень у людино-машинних системах різноманітного призначення, які застосовуються, зокрема, для формування та вдосконалення виробничих програм різних структурних підрозділів соціально-економічних систем, задачах стратегічного планування, узгодження виробництва зі сферою маркетингу, управління розвитком структур великих систем і т. п.

Для сучасних задач прийняття рішень характерно:

1. Використання багатьох критеріїв (багатокритеріальність).

2. Можливість і необхідність цілеспрямованої зміни допустимої області й параметрів критеріїв у процесі оптимізації.

3. Багаторівневість організаційних систем як об'єкта дослідження та управління, розподіленість прийняття рішень за підсистемами й необхідність взаємодії, узгодження, координації рішень для моделей окремих рівнів тощо.

Методи системної оптимізації надають математичну основу для підтримки прийняття рішень при управлінні розвитком розподілених багатокритеріальних багаторівневих систем. Ефективність цього підходу підтверджується практикою застосування СППР для управління інноваціями в різних предметних областях.

Актуальними є також такі напрями: розробка методів системної оптимізації для динамічних систем; розробка нечітких моделей системної оптимізації для розподіленого управління розвитком ієрархічних систем; інтеграція алгоритмів системної оптимізації з техніками візуалізації інформаційних просторів у різних предметних областях з метою підвищення зручності, якості, оперативності процесу прийняття рішень.

3. ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ЦІЛЬОВИХ УСТАНОВОК У ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ СИСТЕМНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

3.1. Математична модель оцінювання ефективності регіонального економічного розвитку організаційної системи

Актуальною проблемою організаційних систем (держави, регіону, корпорації, підприємства) є оцінювання ефективності їхнього економічного розвитку.

Розроблення процедури проведення оцінювання діяльності організаційної системи є основою для вдосконалення регіональної політики управління процесами розвитку економіки. Тож дуже важливим є формування методології оцінювання елементів регіональної системи.

Оцінювання розвитку регіонів країни здійснюється з метою аналізу змін, прогнозування результатів економічної діяльності регіонів у майбутньому та впливу органів виконавчої влади на поліпшення стану справ.

Методологічні підходи до вивчення національних і регіональних систем сформували такі науковці, як Н. І. Іванова, В. В. Іванов, О. Г. Голіченко. Б. Г. Салтиков, К. Фрімен, Б. Лаундвалл. Детальне вивчення розвитку організацій проведено в роботах Р. Слейтер, К. Макі, Дж. Макферлейн, Дж. Грей, С. Кампбел, О. Хайдето, С. Міан, Д. Бредфилд.

Основними принципами, на яких ґрунтується визначення оцінювання економічного розвитку в Україні, є цільова спрямованість, комплексність тощо.

В Україні комплексне оцінювання соціально-економічного розвитку регіонів здійснюється за середнім арифметичним суми рейтингів конкретного регіону за п'ятьма сферами соціально-економічного розвитку регіонів.

Розглянемо метод визначення комплексного оцінювання соціально-економічного розвитку регіональної організаційної системи, який базується на елементах теорії прикладної статистики й використанні теорії нечітких множин. Метод проілюструємо на процедурі оцінювання ефективності соціально-економічного розвитку України для регіонів у 2019–2020 рр.

Подібний методологічний підхід раніше застосовувався до формування оцінювання ринку фінансового капіталу. В Україні джерелами інформаційного забезпечення процедур визначення комплексного оцінювання є дані Держкомстату, Державної податкової адміністрації, Мінфіну, Мінпраці, Мінпаливенерго, НАК "Нафтогаз України" тощо.

Побудуємо математичну модель оцінювання ефективності соціально-економічного розвитку організаційної системи (*EEDM – Evaluation Efficiency Development Model*) на рівні держави такого вигляду: EFCM = < T, L, Ф >, де T – дерево показників, що подано на рис. 1.

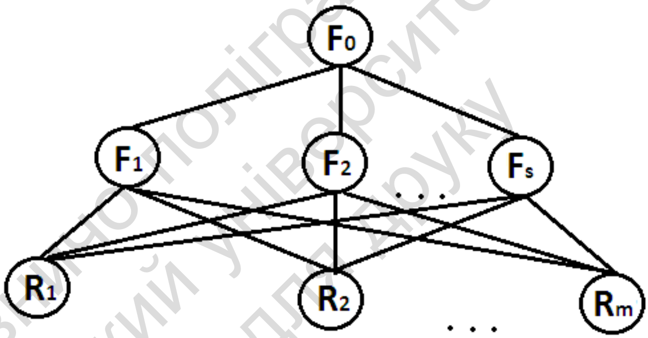

Рис. 1. Дерево показників для оцінювання ефективності економічного розвитку

Нехай F_0 – коренева вершина, що відображає головну ціль – підвищення ефективності розвитку організаційної системи. Декомпозуємо її на підцілі F_s, s = 1,…, S, – критерії соціально-економічного розвитку. На третьому рівні подано R_i, i=1,…m – підсистеми організаційної системи. Для задачі оцінювання регіонального розвитку – R_i, i = 1,…, m – це регіони.

L – набір якісних оцінок рівнів кожного критерію та кожного регіону в ієрархії T. При цьому L = {дуже низький рівень (ДН), низький рівень (Н), середній (С), високий (В), дуже високий рівень (ДВ)}.

Φ – система відношень переважання одних факторів над іншими для одного рівня ієрархії факторів.

$\Phi = \{F_i(\phi)F_j | \phi \in (\succ, \approx), i \neq j\}$, де $\succ$ – відношення строгої переваги, $\approx$ – відношення байдужості.

Для здійснення оцінювання ефективності економічного розвитку організаційної системи в цілому виконаємо агрегування економічних показників кожного рівня ієрархії запропонованої моделі.

Використаємо таку процедуру підтримки прийняття рішень для знаходження комплексного оцінювання й оцінювання на кожному рівні ієрархії (рис. 1).

Метод оцінювання ефективності економічного розвитку організаційної системи

1. *Формування рейтингів регіонів за всіма критеріями на основі статистичних даних*

Визначимо ефективність економічного розвитку регіонів за всіма критеріями за період часу $[t_1,t_n]$ у вигляді таблиць.

Сформуємо таблиці рейтингів регіонів, використовуючи статистичні показники за *n* періодів часу $[t_1, t_n]$ (табл. 1) за кожним критерієм $F_s, s = 1,\ldots,S$, де:

t_1 – початковий момент часу, $t_1 > 0$;

t_n – кінцевий момент часу, $t_n > 0$;

n – кількість періодів, що розглядаються;

m – кількість регіонів, m > 0;

R_{ij} – рейтинг кожного регіону i, i=1,…, m за кожний проміжок часу j, j = 1,…, n.

***Таблиця* 1**

Рейтинги регіонів за критерієм F_s, s = 1,…, S

Періоди часу / Регіони	t_1	t_2	…………	t_n
Регіон 1	R_{11}	R_{12}	…………	R_{1n}
Регіон 2	R_{21}	R_{22}	…………	R_{2n}
…………	…………	…………	…………	…………
Регіон m	R_{m1}	R_{m2}	…………	R_{mn}

2. *Побудова відносних рейтингів регіонів за всіма критеріями на основі статистичних даних*

Позначимо a_{ij} , $i = 1,\ldots, m$, $j = 1,\ldots, n$ – відносні рейтинги регіонів за кожним критерієм F_s. Визначимо їх за формулою:

$$a_{ij} = \frac{\left(m+1-R_{ij}\right)}{m}, \text{ i=1,…, m, j = 1,…,n.}$$

Сформуємо таблиці відносних рейтингів регіонів за кожним критерієм F_s $s = 1,\ldots, S$, за *n* періодів часу $[t_1,t_n]$ (табл. 2):

Таблиця 2

Відносні рейтинги регіонів за критерієм F_s, s = 1, …, S

Періоди часу / Регіони	**t_1**	**t_2**	**…………**	**t_n**
Регіон 1	a_{11}	a_{12}	…………	a_{1n}
Регіон 2	a_{21}	a_{22}	…………	a_{2n}
…………	…………	…………	…………	…………
Регіон m	a_{m1}	a_{m2}	…………	a_{mn}

Агрегування статистичних даних за період часу $[t_1,t_n]$ на основі елементів теорії прикладної статистики

На основі інформації з табл. 2 визначимо відносні рейтинги регіонів за кожним критерієм F_s, $s = 1,\ldots, S$ у вигляді нечіткої множини за період часу $[t_1,t_n]$. Розглянемо дані в табл. 2 по рядках: $A_i= \{a_{i1s}, a_{i2s}, a_{i3s}, \ldots, a_{ins}\}$, $i=1,\ldots, m$ як вибірку об'ємом *n* із генеральної сукупності $\{1/m, 2/m, \ldots 1\}$. Розподіл випадкових величин у вибірці є дискретним нерівномірним. Визначимо довірчий інтервал $[b_{is}, c_{is}]$ для кожного регіону за кожним критерієм.

Позначимо вибіркову середню: $\overline{a_{is}} = \dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ijs}\right)}{n}$,

математичне сподівання: $M(a_{is}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ijs} \cdot p_{ijs}$,

дисперсію: $D(a_{is}) = M(a_{is}^{2}) - (M(a_{is}))^2$, середньоквадратичне відхилення: $\sigma(a_{is}) = \sqrt{D(a_{is})}$,

коефіцієнт надійності: $\gamma = 0{,}95$,

ступінь довіри: $\alpha = 1\text{-}\gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$,

$t_{0,05} = 1{,}9722$ (із таблиць).

Довірчий інтервал: $[b_{is}, c_{is}] = \left[\overline{a_{is}} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{a_{is}} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Будемо вважати $[b_{is}, c_{is}]$ відносним рейтингом регіону i, i = 1,…,m, за вибраним критерієм F_s, s = 1,…,S за період часу $[t_1, t_n]$, що визначений у вигляді нечіткої множини.

3. *Агрегування оцінок за регіонами для кожного критерію на основі теорії нечітких множин*

Для знаходження оцінок використаємо теорію нечітких множин.

За сімейство функцій належності візьмемо стандартний п'ятирівневий 01 класифікатор (3.1) – (3.5), де функції належності – трапецеподібні числа (рис. 2, табл. 3).

П'ятирівневий класифікатор має вигляд:

(ДН)
$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1{,}0 \le x \le 0{,}15 \\ 10 \cdot (0{,}25 - x),\ 0{,}15 \le x \le 0{,}25 \\ 0{,}0.25 \le x \le 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

(Н)
$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0{,}0 \le x \le 0{,}15 \\ 10 \cdot (x - 0{,}15),\ 0{,}5 \le x \le 0{,}25 \\ 1{,}0{,}25 \le x \le 0{,}35 \\ 10 \cdot (0{,}45 - x),\ 0{,}35 \le x \le 0{,}45 \\ 0{,}0{,}45 \le x \le 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

(С)
$$\mu_3(x) = \begin{cases} 0{,}0 \le x \le 0{,}35 \\ 10 \cdot (x - 0.35){,}0{,}35 \le x \le 0{,}45 \\ 1,\ 0{,}45 \le x \le 0{,}55 \\ 10 \cdot (0{,}65 - x),\ 0{,}55 \le x \le 0{,}65 \\ 0,\ 0{,}65 \le x \le 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

(В) $$\mu_4(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le 0,55\\ 10\cdot(x-0,55), 0,55\le x\le 0,65\\ 1, 0,65\le x\le 0,75\\ 10\cdot(0,85-x), 0,75\le x\le 0,85\\ 0, 0,85\le x\le 1\end{cases} \quad (3.4)$$

(ДВ) $$\mu_5(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le 0,75\\ 10\cdot(x-0,75), 0,75\le x\le 0,85\\ 1, 0,85\le x\le 1\end{cases} \quad (3.5)$$

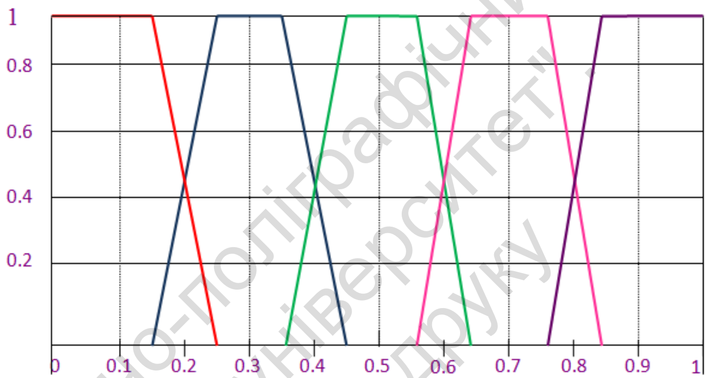

Рис. 2. Система трапецієподібних функцій належності на 01 носії (відрізок [0,1])

Стандартний класифікатор здійснює проєкцію нечіткого лінгвістичного опису на 01 носії, симетрично розташовуючи вузли класифікації (0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9).

Таблиця 3

П'ятирівневий класифікатор

(1)	$\mu_1(x)$	0	0	0,15	0,25	(ДН)
(2)	$\mu_2(x)$	0,15	0,25	0,35	0,45	(Н)
(3)	$\mu_3(x)$	0,35	0,45	0,55	0,65	(С)
(4)	$\mu_4(x)$	0,55	0,65	0,75	0,85	(В)
(5)	$\mu_5(x)$	0,75	0,85	0	0	(ДВ)

Ставимо у відповідність кожному відрізку $[b_{js}, c_{is}]$ значення п'ятирівневого класифікатора та визначаємо якісні лінгвістичні оцінки L_{is}, $i = 1,\ldots, m$, $s = 1,\ldots S$ рівнів значення кожного критерію по регіонах і відповідні їм кількісні оцінки μ_{is}, $s = 1,\ldots S$. Внесемо отримані дані в табл. 4.

***Таблиця* 4**

Оцінки рівнів значень критеріїв F_s, $s = 1,\ldots,S$ по регіонах

Періоди часу / **Регіони**	**F_1**	**F_2**	**…………**	**F_S**
Регіон 1	μ_{11}	μ_{12}	…………	μ_{1s}
Регіон 2	μ_{21}	μ_{22}	…………	μ_{2s}
…………	…………	…………	…………	…………
Регіон m	μ_{m1}	μ_{m2}	…………	μ_{ms}

Існує 2^{m-1} варіантів задання системи переваг одних регіонів над іншими для m-регіонів. Для визначення системи переваг можна скористатися методами експертного оцінювання (напр., методом попарних порівнянь, методом аналізу ієрархій, методом вагів Фішберна та ін.).

Будемо вважати, що для досліджуваної задачі всі регіони рівноцінні, тобто $F_1 \approx F_2 \approx \ldots \approx F_m$ і мають однакову вагу: $p_1 = p_2 = \ldots p_m$.

Стан економічного розвитку організаційної системи за критерієм s характеризується лінгвістичною оцінкою та функцією належності, яка визначається OWA оператором Ягера, що має вигляд:

$$\mu_s(x) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\mu}_{is}(x) \cdot p_i\,, \tag{3.6}$$

$$\mu_{is}(x) = \begin{cases} (1), \text{ якщо } L_i = "ДН", \\ (2), \text{ якщо } L_i = "Н", \\ (3), \text{ якщо } L_i = "С", \\ (4), \text{ якщо } L_i = "В", \\ (5), \text{ якщо } L_i = "ДВ", \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots, m \tag{3.7}$$

Функції належності μ_{js} $i = 1,\ldots,m$, $s = 1,\ldots,S$ мають трапецієподібну форму. Тому вираз (3.6) є трапецієподібним нечітким числом. Можна звести операції з функціями належності до операцій над їхніми вершинами. Позначимо $(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4})$, $i = 1,\ldots,m$ як трапецієподібні числа системи (3.6), де d_{iq} відповідає абсцисі вершини трапеції q, $q = 1,\ldots,4$, для μ_{is} – функції належності регіону i. Тоді перепишемо вираз (3.6) у вигляді:

$$\mu_s(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(x) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot (d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i2}, \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i3}, \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i4} \right).$$

Далі лінгвістично розпізнаємо функцію (3.6), щоб мати судження про якісний рівень критерію другого рівня. Для цього порівняємо $\mu_s(x)$ та функції $\mu_i(x)$ вигляду (3.1)–(3.5). Виберемо як міру розпізнавання рівня класифікатора різновид норми Хемінга та застосуємо її. Тоді ступінь подібності двох трапецієподібних чисел $(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4})$ та $(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, e_{i4})$ може бути визначено як:

$$0 \le \upsilon = \left\{ 1 - \max \left\{ \begin{matrix} |d_{i1} - e_{i1}|, |d_{i2} - e_{i2}|, \\ |d_{i3} - e_{i3}|, |d_{i4} - e_{i4}|, \end{matrix} \right\} \right\} \le 1, \qquad (3.8).$$

Ми провели агрегування даних за регіонами в ієрархії та розпізнавання оцінки за шкалою L. У такий спосіб визначили ступінь ефективності економічного розвитку держави за кожним критерієм F_s, $s = 1,\ldots,S$, з відповідним рівнем схожості. Тобто знайшли набір якісних оцінок рівнів кожного критерію $F_s, s = 1, \ldots, S$.

***4.** Агрегування оцінок за всіма критеріями на основі теорії нечітких множин*

Переходимо до наступного рівня ієрархії. Визначимо якісну оцінку ефективності організаційної системи на рівні держави в цілому, як лінгвістичну інтерпретацію L, а також відповідну функцію належності зі ступенем подібності вигляду (3.8).

Ураховуючи якісний характер критеріїв, сформуємо на основі (3.6) лінгвістичну змінну L_s, яка є набором якісних оцінок рівнів значення кожного критерію $F_s, s = 1, \ldots 5$ та, відповідно, μ_s. Уважаємо, що задана система відношень переважання одних критеріїв над іншими для другого рівня ієрархії критеріїв така:

$\Phi = \{F_i\ (\varphi)\ \mathrm{F}_j \mid \varphi \in (\succ, \approx)\}$, де $\succ$ – відношення строгої переваги, $\approx$ – відношення байдужості.

Для того щоб розрахувати оцінку ступеня ефективності розвитку організаційної системи (кількісну та якісну), необхідно зробити агрегування попередніх оцінок. Для агрегування інформації застосуємо OWA – оператор Ягера, де вагами у згортці виступають коефіцієнти Фішберна p_s, s = 1,…, S.

Далі розглянемо порядок побудови вагів Фішберна.

Кожному показнику F_s, s = 1,…,S ставиться у відповідність рівень його значущості для аналізу r_s, s = 1,…, S. Якщо можна – розмістити всі показники F_s у порядку зростання значущості таким чином, щоб виконувалась така умова:

$$F_1 \succ\approx F_2 \succ\approx \ldots \succ\approx F_s,\ \text{то}$$

$$p_s = \frac{2 \cdot (S - s + 1)}{(S + 1) \cdot S},\ s = 1,\ldots,S,$$

де p_s – вага s-го критерію; S – кількість критеріїв.

Якщо показники F_s мають однакову значущість, тобто перебувають у такому відношенні:

$F_1 \approx F_2 \approx \ldots \approx F_s$, то визначаємо p_s за такою формулою: $p_s = \dfrac{1}{S}$.

Для змішаної системи переваг необхідно визначити r_s, s = 1, …, S за рекурсивною схемою:

$$r_{s-1} = \begin{cases} r_s, F_{s-1} \approx F_s \\ r_s + 1, F_s - 1 \succ F_s \end{cases} \tag{3.9}$$

$r_s = 1$, s = S,…, 2.

Тоді ваговий коефіцієнт Фішберна визначаємо як:

$$p_s = \frac{r_s}{K},\ s=1,\ldots,S$$

$$K = \sum_{s=1}^{S} r_s \ .$$

У такий спосіб отримаємо вектор вагових коефіцієнтів Фішберна: $p = (p_1, p_2, \dots p_s)$.

Для наочності в табл. 5 зведено дроби Фішберна для всіх змішаних систем відношень переваг при s = 2,…, 5.

Таблиця **5**

Дроби Фішберна для всіх змішаних систем відношень переваг

N	**Ф**	**p1**	**p2**	**p3**	**p4**	**p5**
2	$F_1 \approx F_2$	1/2	1/2	–	–	–
	$F_1 \succ F_2$	2/3	1/3	–	–	–
3	$F_1 \approx F_2 \approx F_3$	1/3	1/3	1/3	–	–
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3$	2/4	1/4	1/4	–	–
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3$	2/5	2/5	1/5	–	–
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3$	3/6	2/6	1/6	–	–
4	$F_1 \approx F_2 \approx F_3 \approx F_4$	1/4	1/4	1/4	1/4	–
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3 \approx F_4$	2/5	1/5	1/5	1/5	–
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3 \approx F_4$	2/6	2/6	1/6	1/6	–
	$F_1 \approx F_2 \approx F_3 \succ F_4$	2/7	2/7	2/7	1/7	–
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \approx F_4$	3/7	2/7	1/7	1/7	–
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3 \succ F_4$	3/8	2/8	2/8	1/8	–
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3 \succ F_4$	3/9	3/9	2/9	1/9	–
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \succ F_4$	4/10	3/10	2/10	1/10	–
5	$F_1 \approx F_2 \approx F_3 \approx F_4 \approx F_5$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3 \approx F_4 \approx F_5$	2/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3 \approx F_4 \approx F_5$	1/6	2/6	1/6	1/6	1/6
	$F_1 \approx F_2 \approx F_3 \succ F_4 \approx F_5$	1/6	1/6	2/6	1/6	1/6
	$F_1 \approx F_2 \approx F_3 \approx F_4 \succ F_5$	2/9	2/9	2/9	2/9	1/9

Закінчення табл. 5

N	Φ	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \approx F_4 \approx F_5$	3/8	2/8	1/8	1/8	1/8
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3 \succ F_4 \approx F_5$	3/9	2/9	2/9	1/9	1/9
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3 \approx F_4 \succ F_5$	3/10	2/10	2/10	2/10	1/10
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3 \approx F_4 \succ F_5$	3/11	3/11	2/11	2/11	1/11
	$F_1 \approx F_2 \approx F_3 \succ F_4 \succ F_5$	3/12	3/12	3/12	2/12	1/12
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3 \succ F_4 \approx F_5$	3/10	3/10	2/10	1/10	1/10
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \succ F_4 \approx F_5$	4/11	3/11	2/11	1/11	1/11
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \approx F_4 \succ F_5$	4/12	3/12	2/12	2/12	1/12
	$F_1 \succ F_2 \approx F_3 \succ F_4 \succ F_5$	4/13	3/13	3/13	2/13	1/13
	$F_1 \approx F_2 \succ F_3 \succ F_4 \succ F_5$	4/14	4/14	3/14	2/14	1/14
	$F_1 \succ F_2 \succ F_3 \succ F_4 \succ F_5$	5/15	4/15	3/15	2/15	1/15

Критерій F_0 характеризується лінгвістичною оцінкою, що визначається на його рівні (*) функцією належності на 01 осі x (оператором Ягера), який має вигляд:

$$\mu^*(x) = \sum_{s=1}^{S} \mu_s(x) \cdot p_s \tag{3.10}$$

$$\mu_s(x) = \begin{cases} (1), \text{ якщо } L_s = "ДН", \\ (2), \text{ якщо } L_s = "Н", \\ (3), \text{ якщо } L_s = "С", \quad s = 1,\ldots, S \\ (4), \text{ якщо } L_s = "В", \\ (5), \text{ якщо } L_s = "ДВ", \end{cases} \tag{3.11}$$

Використаємо п'ятирівневий класифікатор (табл. 3).

$$\mu_s(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(x) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot (d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}) = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i2}, \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i3}, \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_{i4} \right). \tag{3.12}$$

Далі лінгвістично розпізнаємо функцію (10), щоб мати якісне судження про якісний рівень критерію F_0. Для цього порівняємо $\mu^*(x)$ та функції $\mu(x)$ вигляду (3.1)–(3.5) і знову використаємо, як міру розпізнавання рівня класифікатора, різновид норми Хемінга. Отже, отримали функцію належності $\mu^*(x)$, лінгвістичну інтерпретацію L зі ступенем схожості для F_0. Тобто запропонована методологія дозволяє розв'язати поставлену задачу.

5. *Приклад*

У статті оцінювалась ефективність економічного розвитку України на основі статистичних даних Державного комітету статистики України за 2019–2020 рр.

Оцінка ефективності економічного розвитку держави (F_0) виконувалась за п'ятьма показниками F_s, $s = 1,\ldots,5$, на другому рівні ієрархії та за всіма регіонами України на розглядуваний період часу: R_i, $i = 1,\ldots, 25$, на третьому рівні ієрархії. Тобто розглядалась ієрархія показників, яка набула вигляду (див. рис. 3):

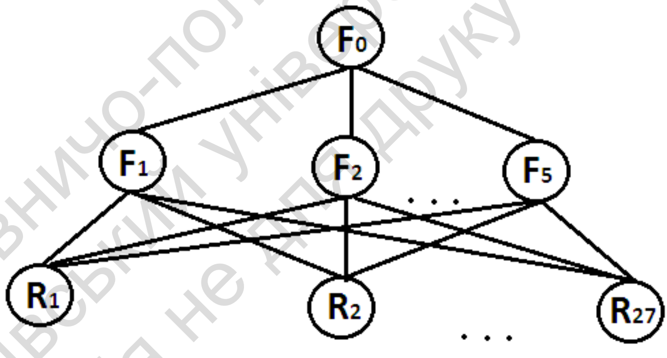

Рис. 3. Дерево показників для оцінювання економічного розвитку України

F_0 – ефективність розвитку функціонування економіки на державному рівні; F_1 – ефективність розвитку реального сектору економіки; F_2 – ефективність розвитку інвестиційної та зовнішньоекономічної діяльності; F_3 – збільшення державних фінансів і фінансових результатів діяльності підприємств; F_4 – ефективність розвитку соціального сектору економіки; F_5 – ефективність розвитку споживчого ринку.

$[t_1, t_6]$ – період часу з 09.2019 до 01.2021 року, який розглядався поквартально, відповідно до надходження статистичних даних.

R_i, i= 1,…, 27 – рейтинги по 24-х областях України, м. Київ (індекс *i* відповідає номеру регіону в алфавітному порядку).

На основі даних із інформаційних джерел були сформовані таблиці рейтингів регіонів за всіма критеріями за період часу $[t_1, t_6]$.

У табл. 6 наведено поквартальні рейтинги регіонів України за першим критерієм F_1.

***Таблиця* 6**

Рейтинги регіонів України у сфері реального сектора

Регіони України	Сфера реального сектора					
	Вересень 2019 р.	Грудень 2019 р.	Березень 2020 р.	Червень 2020 р.	Вересень 2020 р.	Грудень 2020 р
Вінницька	5	11	21	17	11	8
Волинська	25	25	24	14	9	11
Дніпропетровська	20	16	3	9	10	16
Донецька	23	21	27	27	23	25
Житомирська	16	12	23	20	18	19
Закарпатська	22	27	7	2	1	4
Запорізька	26	26	26	23	16	23
Івано-Франківська	1	1	14	13	12	5
Київська	10	9	16	16	14	15
Кіровоградська	15	20	9	12	7	9
Луганська	27	23	19	26	27	26
Львівська	7	8	13	10	17	17
Миколаївська	6	3	10	7	5	3
Одеська	17	18	11	15	4	2
Полтавська	8	5	1	4	8	14
Рівненська	19	17	20	24	20	18

Закінчення табл. **6**

Регіони України	Сфера реального сектора					
	Вересень 2019 р.	Грудень 2019 р.	Березень 2020 р.	Червень 2020 р.	Вересень 2020 р.	Грудень 2020 р
Сумська	12	13	18	25	26	27
Тернопільська	2	4	2	3	15	12
Харківська	24	24	4	6	22	24
Херсонська	3	2	6	5	3	7
Хмельницька	18	15	22	22	24	20
Черкаська	14	10	5	1	21	10
Чернівецька	4	6	17	8	2	1
Чернігівська	11	14	12	11	19	22
м. Київ	13	19	8	18	6	6

Дані відносних рейтингів регіонів були сформовані за всіма критеріями s, s = 1,…5 за період часу [t_1, t_6]. Вони наведені в табл. 7 для першого критерію F_1.

Таблиця 7

**Відносні рейтинги регіонів України
у сфері реального сектора**

Регіони України	Сфера реального сектора					
	Вересень 2019 р	Грудень 2019 р	Березень 2020 р	Червень 2020 р	Вересень 2020 р	Грудень 2020 р
Вінницька	0,85	0,63	0,26	0,41	0,63	0,74
Волинська	0,11	0,11	0,15	0,52	0,7	0,63
Дніпропетровська	0,3	0,44	0,93	0,7	0,67	0,44
Донецька	0,19	0,26	0,04	0,04	0,19	0,11
Житомирська	0,44	0,59	0,19	0,3	0,37	0,33
Закарпатська	0,22	0,04	0,78	0,96	1	0,89
Запорізька	0,07	0,07	0,07	0,19	0,44	0,19
Івано-Франківська	1	1	0,52	0,56	0,59	0,85
Київська	0,67	0,7	0,44	0,44	0,52	0,48

Закінчення табл. 7

Регіони України	Сфера реального сектора					
	Вересень 2019 р	Грудень 2019 р	Березень 2020 р	Червень 2020 р	Вересень 2020 р	Грудень 2020 р
Кіровоградська	0,48	0,3	0,7	0,59	0,78	0,7
Луганська	0,04	0,19	0,33	0,07	0,04	0,07
Львівська	0,78	0,74	0,56	0,67	0,41	0,41
Миколаївська	0,81	0,93	0,67	0,78	0,85	0,93
Одеська	0,41	0,37	0,63	0,48	0,89	0,96
Полтавська	0,74	0,85	1	0,89	0,74	0,52
Рівненська	0,33	0,41	0,3	0,15	0,3	0,37
Сумська	0,59	0,56	0,37	0,11	0,07	0,04
Тернопільська	0,96	0,89	0,96	0,93	0,48	0,59
Харківська	0,15	0,15	0,89	0,81	0,22	0,15
Херсонська	0,93	0,96	0,81	0,85	0,93	0,78
Хмельницька	0,37	0,48	0,22	0,22	0,15	0,3
Черкаська	0,52	0,67	0,85	1	0,26	0,67
Чернівецька	0,89	0,81	0,41	0,74	0,96	1
Чернігівська	0,63	0,52	0,59	0,63	0,33	0,22
м. Київ	0,56	0,33	0,74	0,37	0,81	0,81

Рядки даних у табл. 6, 7 розглядалися як вибірка об'ємом *n* із генеральної сукупності {1/27, 2/27, … 1}. Визначалися довірчі інтервали [b_{is}, c_{is}] для кожного регіону та, i = 1,…, 27 за кожним критерієм s, s = 1,…,5. Для прикладу наведено процедуру знаходження довірчого інтервалу [b_{11}, c_{11}] для регіону й, i = 1, за критерієм s, s = 1.

$$\overline{a_{11}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{6} a_{1j1}\right)}{6} = 0{,}506173,$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{a}_{11}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{6} \mathrm{a}_{1\mathrm{j}1} \cdot p_{1j1} = 15{,}09468,$$

$$D(a_{11})=M(a_{11}{}^2) - (M(a_{11}))^2 = 0{,}060722,$$

$$\sigma(a_{11}) = \sqrt{D(a_{11})} = 0{,}246419,\ \gamma = 0{,}95,$$

$$\alpha = 1-\gamma = 1-0{,}95 = 0{,}05,\ t_{0{,}05} = 1{,}9722.$$

$$b_{11} = \overline{a_{11}} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{6}} = 0{,}5062 - 1{,}9722 \cdot \frac{0{,}2464}{\sqrt{6}} = 0{,}3078,$$

$$c_{11} = \overline{a_{11}} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{6}} = 0{,}5062 + 1{,}9722 \cdot \frac{0{,}2464}{\sqrt{6}} = 0{,}7046.$$

$$[b_{11}, c_{11}] = [0{,}3078,\ 0{,}7046].$$

Відрізок $[b_{is}, c_{is}]$ – це відносний рейтинг регіону i, i = 1,…,m, за вибраним критерієм F_s $s = 1, \ldots, S$ за період часу $[t_1, t_n]$.

Сформуємо таблицю якісних оцінок μ_{is}, i = 1,…,27, s = 1,…,5 рівнів значення кожного критерію за регіонами (табл. 8):

Таблиця 8

Таблиця якісних оцінок рівнів значення кожного критерію за регіонами

Регіони України	F1	F2	F3	F4	F5
Вінницька	С	С	В	С	ДВ
Волинська	Н	С	С	Н	С
Дніпропетровська	В	С	Н	В	С
Донецька	ДН	В	С	С	Н
Житомирська	Н	С	С	С	В
Закарпатська	В	Н	В	В	С
Запорізька	ДН	Н	С	Н	С
Івано-Франківська	В	С	В	ДВ	В
Київська	С	ДВ	С	С	В
Кіровоградська	С	Н	В	Н	ДВ
Луганська	ДН	С	Н	Н	С
Львівська	В	С	Н	В	С
Миколаївська	ДВ	С	ДВ	В	С
Одеська	С	С	В	С	С
Полтавська	ДВ	В	Н	Н	С
Рівненська	Н	С	Н	В	С

***Закінчення табл.* 8**

Регіони України	F1	F2	F3	F4	F5
Сумська	Н	В	В	ДН	Н
Тернопільська	ДВ	Н	В	С	В
Харківська	С	С	ДН	С	С
Херсонська	ДВ	С	В	С	Н
Хмельницька	Н	В	ДВ	В	Н
Черкаська	В	С	С	С	В
Чернівецька	В	С	Н	В	В
Чернігівська	С	ДН	С	ДН	С
м. Київ	С	ДВ	ДН	ДВ	В

Визначимо стан економічного розвитку за критерієм s за допомогою OWA оператора Ягера:

$$\mu_1(x) = \sum_{i=1}^{27} \mu_i(x) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{27} p_i \cdot (d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}, d_{i4}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{27} p_i \cdot d_{i1}, \sum_{i=1}^{27} p_i \cdot d_{i2}, \sum_{i=1}^{27} p_i \cdot d_{i3}, \sum_{i=1}^{27} p_i \cdot d_{i4} \right) = \qquad (3.12)$$

$$= (0{,}3815, 0{,}4778, 0{,}5093, 0{,}6019).$$

Далі лінгвістично розпізнаємо функцію (3.12), щоб мати якісне судження про якісний рівень критерію другого рівня.

$$\upsilon_{\text{ДН}} = \left\{ 1 - \max \left\{ \begin{matrix} |0{,}3815|, |0{,}4778|, \\ |0{,}5093 - 0{,}15|, |0{,}6019 - 0{,}25| \end{matrix} \right\} \right\} =$$

$$\{1 - 0{,}4778\} = 0{,}5222;$$

$$\upsilon_{\text{Н}} = \left\{ 1 - \max \left\{ \begin{matrix} |0{,}3815 - 0{,}15|, |0{,}4778 - 0{,}25|, \\ |0{,}5093 - 0{,}35|, |0{,}6019 - 0{,}45| \end{matrix} \right\} \right\} =$$

$$\{1 - 0{,}2315\} = 0{,}7685;$$

$$\upsilon_{\text{С}} = \left\{ 1 - \max \left\{ \begin{matrix} |0{,}3815 - 0{,}35|, |0{,}4778 - 0{,}45|, \\ |0{,}5093 - 0{,}55|, |0{,}6019 - 0{,}65| \end{matrix} \right\} \right\} =$$

$$\{1 - 0{,}0481\} = 0{,}9519;$$

$$\upsilon_{\text{В}} = \left\{1 - \max\left\{\begin{matrix} |0{,}3815 - 0{,}55|, |0{,}4778 - 0{,}65|, \\ |0{,}5093 - 0{,}75|, |0{,}6019 - 0{,}85| \end{matrix}\right\}\right\} =$$

$$\{1 - 0{,}2481\} = 0{,}7519;$$

$$\upsilon_{\text{Н}} = \left\{1 - \max\left\{\begin{matrix} |0{,}3815 - 0{,}75|, |0{,}4778 - 0{,}85|, \\ |0{,}5093 - 0|, |0{,}6019 - 0| \end{matrix}\right\}\right\} =$$

$$\{1 - 0{,}6019\} = 0{,}3981.$$

Отримали лінгвістичну інтерпретацію F_0: ступінь ефективності соціально-економічного розвитку України оцінюється як середній рівень зі ступенем схожості – 0,95.

Ми провели агрегування даних за регіонами в ієрархії та розпізнавання оцінки за шкалою L. Таким чином ми визначили ступінь ефективності економічного розвитку держави за кожним критерієм F_s, s = 1,..,S, з відповідним рівнем схожості. Тобто знайшли набір якісних оцінок рівнів кожного критерію F_s, s = 1,..,S.

Висновки. Запропонована методологія оцінювання ефективності економічного розвитку організаційної системи на основі теорії нечітких множин. Метод застосовано для оцінювання ефективності економічного розвитку України, який дозволяє отримувати оцінки, більш близькі до дійсності та використовувати їх для побудови цільових установок під час прийняття рішень. Застосування методів візуалізації для пошуку артефактів дозволить покращити процедуру вибору цільових установок.

3.2. Статистична модель прогнозування інтервалів між терактами

Розглянуто системно-аналітичний і статистичний підходи до розв'язання проблем аналізу та прогнозування терактів. Об'єктом дослідження обрано інтервали між терактами. Саме через них можна прогнозувати час наступного теракту та планувати заходи антитерористичної діяльності. Запропонована методологія проілюстрована прикладами в Афганістані, Алжирі, Індії, Іраку та у США. Для обчислень було використано статистичні дані 2010–2020 рр.

Тероризм є однією з найголовніших проблем сучасного світу. Міжнародна спільнота намагається боротися з тероризмом через транснаціональні угоди й договори, дії відповідних адміністративних і військових структур країн тощо. Але витрати тільки на антитерористичну кампанію в Іраку сягли майже 2 трл дол. (Для порівняння: державний бюджет України 2020 р. за офіційними даними становив 20 млрд дол.). Проблема тероризму без застосування чітко структурованого підходу не є вирішеною повною мірою.

Пріоритетним напрямом цього підрозділу є системне застосування математичного апарату для виявлення загальних закономірностей у терористичних актах, що відбулися у світі, з метою подальшого використання при управлінні антитерористичною діяльністю.

Поставлені такі завдання:

- з'ясувати характер залежності (або навпаки, показати, різницю в залежностях) між терактами, обраними за певним критерієм (країна, терористичне угрупування);
- вивчити закон розподілу інтервалів між терактами;
- оцінити параметри відповідних розподілів;
- знайти залежність між подіями геополітичного характеру в світі й терактами, ґрунтуючись на результатах попереднього статистичного аналізу;
- запропонувати підхід до управління антитерористичною діяльністю.

Використано такі методи та критерії:

- критерій згоди Колмогорова-Смирнова для перевірки показникового розподілу досліджуваної випадкової величини;
- критерій згоди χ^2 Пірсона для перевірки показникового розподілу досліджуваної випадкової величини;
- оцінка параметру експоненційного розподілу методом мінімального відхилення;
- оцінка параметру експоненційного розподілу методом найменших квадратів;
- алгоритм системної оптимізації як підхід до управління антитерористичною діяльністю.

У підрозд. 3.2 досліджуються вибірки терактів, що відбулися з 2010 до 2020 р. у п'яти "гарячих" точках планети: Афганістані, Алжирі, Індії, Ірані та США.

Безперечно, головними атрибутами, що можуть описувати теракт, є дата, геополітична зона, країна, регіон і місто, де він відбувся. Подамо його у вигляді структури даних, яка має такі показники: коли відбувся; де відбувся; тип; як відбувся; хто взяв відповідальність. Крім цього, важлива інформація про успішність теракту. Під час аналізу терактів було вирішено ввести таку класифікацію за об'єктом нападу: освітні заклади, урядові структури, засоби масової інформації, релігійні заклади, туристи, транспорт, комунальні споруди, інше. Аналітиків цікавить також національність потерпілих, чи були захоплені заручники, які матеріальні збитки завдав теракт.

Головним завданням є побудова певної стохастичної моделі для досліджуваного процесу в обраній предметній області, тобто визначення модельної функції розподілу для випадкових величин, що являють собою інтервали між терористичними актами.

Ми висуваємо гіпотезу про те, що розподіл інтервалів між терактами, як випадкових величин, є експоненційним. Опишемо основні методи, що використовуються для обґрунтування висуненої гіпотези.

Метод найменших квадратів (МНК). Ми ставимо перед собою мету оцінити невідомий параметр розподілу. Виникає оптимізаційна задача:

$$\lambda_n^- = \lambda_n - \frac{\lambda_0}{2^n},\ \lambda_n^+ = \lambda_n + \frac{\lambda_0}{2^n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} (F_n(\eta_i) - F(\eta_i, \lambda))^2 \to \min_{\lambda},$$

де n – кількість елементів у вибірці, $F_n(\cdot)$ – емпірична функція розподілу, $F(\cdot, \cdot)$ – теоретична функція розподілу за показниковим законом:

$$\lambda = \arg\min \max_{i=1,\, n} \left| \frac{i}{n} - 1 - e^{-\lambda\eta_i} \right|.\ F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x},\ \lambda > 0.$$

Отже, функціонал МНК для досліджуваного випадку має вигляд:

$$A(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - 1 - e^{\lambda \eta_i} \right)^2,$$

Тобто $\lambda = \arg\min \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - 1 - e^{\lambda \eta_i} \right)^2$.

У **методі оцінки за найменшим відхиленням** функціонал має вигляд:

$$A(\lambda) = \max_{i=1,\, n} \left| \frac{i}{n} - 1 - e^{-\lambda \eta_i} \right|.$$

$$\lambda = \arg\min \max_{i=1,\, n} \left| \frac{i}{n} - 1 - e^{-\lambda \eta_i} \right|.$$

Ми використовуємо таку процедуру пошуку невідомого параметра, що є модифікованим методом дихотомії для знаходження оптимального λ^*:

1. Визначення початкового наближення, запропонованого Карлом Пірсоном, за методом моментів, що є незміщеною оцінкою невідомого параметра, будується як

$$\lambda_0 = \frac{1}{\bar{x}},$$

де $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ – вибіркове середнє.

2. Нехай на ітерації *n* поточним результатом є значення λ_n.

Тоді результатом $n+1$ ітерації буде

$$\lambda_{n+1} = \arg\min \left(A\left(\lambda_n^-\right), A\left(\lambda_n^+\right) \right),$$

де $\lambda_n^- = \lambda_n - \frac{\lambda_0}{2^n}, \lambda_n^+ = \lambda_n + \frac{\lambda_0}{2^n}$, $A(\cdot)$ – функціонал відповідного методу. Алгоритм завершується, коли наперед досягнено задану точність ε:

$$\left| \lambda_{n+1} - \lambda_n \right| < \varepsilon.$$

Отже, ми оцінили значення невідомого параметра λ, що визначає конкретний вигляд теоретичної експоненційної функції розподілу. Тепер перевіримо, чи така максимально наближена функція розподілу описує випадковий процес, виражений інтервалами між терористичними актами, за допомогою **критерію згоди Колмогорова-Смирнова**.

Гіпотезу критерія H_0 запишемо як:

$$H_0 : MF_n\,(x) \equiv F\,(x), \left(|x| < \infty \right).$$

Виразимо конкурування до H_0 гіпотезою H_1 у загальному випадку:

$$H_1 \left\{ \psi[F(x)] \right\} : \sup_{|x| < \infty} \psi\,[F\,(x)] \cdot \left| MF_n\,(x) - F(x) \right| > 0,$$

де $\psi[F(\cdot)]$ – задана невід'ємна функція. У критерії Колмогорова-Смирнова $\psi[F(\cdot)] \equiv 1$, тобто ми розглядаємо конкуруючу гіпотезу $H_1\,\{1\}$.

Обчислимо статистику критерію Колмогорова-Смирнова:

$$D_n = \max\,\{D_n^+, D_n^-\}, \text{ де}$$

$$D_n^+ = \max\nolimits_{1 \le m \le n} \left[\frac{m}{n} - F\,(\eta_m) \right], \; D_n^- = \max\nolimits_{1 \le m \le n} \left[F(\eta_m) - \frac{m-1}{n} \right].$$

Цей спосіб обчислення не є еквівалентним до розповсюдженого:

$$D_n = \max_{1 \le m \le n} \left| F(\eta_m) - \frac{m}{n} \right|,$$

який дає спотворений результат оцінки, та, очевидно, є спрощеним щодо запропонованого Колмогоровим-Смирновим, і використованого нами. Статистика $\sqrt{nD_n}$ має відомий розподіл Колмогорова-Смирнова, тому вивчати її критичні значення цілком можливо, зробивши певні оцінки.

Пропонується оцінка критичних значень при $\alpha \le 0,2$ та $n \ge 80$:

$$d_\alpha \approx \sqrt{\frac{\ln \dfrac{\alpha}{2}}{2 \cdot n}}.$$

Тобто, якщо $D_n > d_\alpha$, тоді гіпотезу H_0 відхиляють на рівні значущості α і приймають, у зворотному випадку.

Застосуємо ще один **критерій згоди** χ^2 **Пірсона** для визначення відповідності обраної моделі розподілу експоненційного типу випадкової величини ξ до певних наявних вибіркових даних $X_1, X_2 \dots X_n$. Ми вважаємо, що вигляд модельної функції розподілу $F_{\text{mod}}\,(x, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(s)})$ відомий з точністю до параметрів $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots \theta^{(s)}$, які оцінюються з наявної репрезентативної вибірки чи відомі за апріорними оцінками, наприклад, визначеними за допомогою групового експертного оцінювання.

Опишемо за критерієм згоди Пірсона χ^2 процедуру перевірки статистичної гіпотези H_0:

$$F_\xi\,(x) = F_{\text{mod}}\,(x, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(s)}).$$

Цей критерій дозволяє здійснити перевірку гіпотези H_0 в умовах, коли значення параметрів $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots \theta^{(s)}$ модельної функції розподілу повністю не відомі досліднику. Для виміру ступеня відхилення емпіричного розподілу від модельного цей критерій використовує специфічну статистику χ^2. Опишемо процедуру перевірки гіпотези H_0 за цим критерієм згідно з наведеним нижче алгоритмом. Використаємо такий алгоритм для групування вхідних даних.

Алгоритм групування вибіркових даних (Алгоритм 1)

1. Задати початкове розбиття вхідних вибіркових даних $X_1, X_2 \dots, X_n$ на k-інтервалів $\Delta_1, \Delta_2 \dots, \Delta_k$ у такий спосіб, щоб виконувалася умова 2.1. Для цього можливе використання випадкової генерації границь інтервалів, але для більш точного аналізу рекомендується обирати початкове розбиття, зважаючи на природу досліджуваного об'єкта.

2. Переглядати пари інтервалів зліва направо, доки не справдяться умови:

а) загальна кількість інтервалів групування не менша за 8 і визначається формулою, що має евристичний характер:

$$k \geq \max\,(8, s+1)),$$

де s – кількість параметрів розподілу;

б) у кожен інтервал має потрапити не менше 7–10 вибіркових значень ξ і бажано, щоб у різних інтервалах була приблизно однакова кількість точок.

3. Якщо умова 2.b не виконується, тоді потрібно об'єднати пару сусідніх інтервалів і розбити інтервал з найбільшою кількістю входжень вибіркових даних на дві частини, що містять однакову, з точністю до одиниці, кількість входжень вихідної вибірки $X_1, X_2 \ldots X_n$. Така процедура виконується для того, щоб задовольнити умову $k \geq max\,(8, s+1)$. Повернутись до пункту 2.

Алгоритм перевірки гіпотези H_0 за критерієм згоди Пірсона χ^2 (Алгоритм 2)

1. Увесь діапазон значень досліджуваної випадкової величини ξ треба розбити на ряд інтервалів $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k$, тобто застосувати допоміжний алгоритм 1.

2. На основі вибіркових даних $X_1, X_2 \ldots X_n$ побудувати статистичні оцінки $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \ldots, \hat{\theta}^{(5)}$ невідомих параметрів $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots \theta^{(s)}$ модельного закону розподілу. Існує багато способів для розв'язання цієї задачі, але, зважаючи на наявну потужну обчислювальну техніку, ми обрали найліпший критерій для оптимізації – за мінімальним відхиленням. Підраховуються числа ν_i точок, що потрапили у кожен із інтервалів групування Δ_i, та визначаються ймовірності подій $\xi \in \Delta_i$:

$$\rho_i = F_{\text{mod}}\,(\tilde{x}_i^0, \hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \ldots, \hat{\theta}^{(s)} - F_{\text{mod}}\,(\tilde{x}_{i-1,}^0\, \hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \ldots, \hat{\theta}^{(s)},$$

для кожного $i = 2, n,\ \tilde{x}_i^0$ і $\tilde{x}_{i-1}^0$ – це правий і лівий кінці i-го інтервалу групування.

3. Обчислюється величина критичної статистики $\chi^2\,(k-s-1)$ за формулою:

$$\chi^2\,(k-s-1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}.$$

4. За табличними оцінками значень вибирається $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ – відсоткова точка $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(k-s-1)$ і $100\frac{\alpha}{2}$ – відсоткова точка $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(k-s-1)$ χ^2 – розподілу з $k-s-1$ ступенями свободи. Рівень значущості α вибирається апріорно.

5. Якщо

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(k-s-1) \le \chi^2\ (k-s-1) < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(k-s-1),$$

тоді гіпотеза про те, що досліджувана випадкова величина ξ дійсно розподілена за законом F_{mod}, приймається з рівнем значущості α.

6. У випадку, коли справедлива нерівність

$$\chi^2\ (k-s-1) \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(k-s-1),$$

то модельний закон розподілу F_{mod} дуже сильно зі статистичної позиції відхиляється від емпіричного. Тому гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості α.

7. Випадок $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(k-s-1) \le \chi^2\ (k-s-1)$ потребує детальнішого вивчення. Виникає питання, чи не безглуздим є це обмеження, адже ідеальний приклад спостерігається тоді, коли відхилення від модельної функції відсутнє. Але статистика критерію є ймовірнісною мірою відхилення. Тоді, дійсно, абсолютна відсутність відхилення є фактом підозрілим. Одними із причин цієї аномалії можуть бути штучне завищення кількості параметрів, від яких залежить модельна функція розподілу або банальні похибки у спостереженнях.

Для нашого випадку дуже важливо зрозуміти природу терористичного акту. Механічне розбиття наявних вибіркових даних за наведеним вище алгоритмом не дасть бажаного результату в будь-якій предметній області. Тому треба проаналізувати, які особливості мають дані про інтервали між терористичними актами загалом і як вони змінюються в різних територіях.

Зазначимо, що теракти плануються дуже ретельно. Однією з головних особливостей їхнього проведення є те, що вони мають характер серій. І це не дивно, оскільки в усіх вибірках за певними країнами вибірковою модою є значення 0, тобто теракти, що відбулися одночасно.

Аналіз статистичних результатів дослідження

Розглянемо результати, що отримані згідно з наведеним у попередньому розділі аналізом. Ми вибрали шість напрямів для дослідження розподілу інтервалів між терактами:

- значні теракти у країнах;
- всі вияви терористичної діяльності у країнах;
- значні теракти за терористичними групами;
- всі вияви терористичної діяльності за терористичними групами;
- значні теракти, у результаті яких постраждала певна етнічна група;
- усі теракти, унаслідок яких постраждала певна етнічна група.

Для кожного напряму ми будемо визначати такі статистичні характеристики:

- кількість інтервалів між досліджуваними випадками терористичної діяльності;
- кількість інтервалів між досліджуваними випадками терористичної діяльності, що не включають теракти, які потрапили до одноденних серій терактів;
- середня кількість днів, що проходила між терактами;
- дисперсія вихідної вибірки;
- кількість груп, що утворилися після розбиття вхідної переробленої вибірки на інтервали;
- кількість ступенів свободи апроксимованого статистикою розподілу χ^2;
- оцінка параметру λ модельного експоненційного розподілу, отримана за методом найменшого відхилення;

- значення статистики критерію згоди χ^2;
- критичні значення для статистики критерію згоди χ^2 з рівнем значущості 0,05;
- критичні значення для статистики критерію згоди χ^2 з рівнем значущості 0,04;
- статистичні висновки з рівнем значущості 0,05 та 0,04.

Проведемо якісний аналіз результатів за даними пунктами кількісного дослідження. Зауважимо, що до розгляду входили лише ті вибірки, що містили не менше 15 значень досліджуваної величини. А саме:

- *Значні теракти у країнах*

Із 30-ти країн, що потрапили за критерієм відбору, такими, що підпали під справдження статистичної гіпотези, виявилися п'ять – Ангола, Індонезія, Іспанія, Судан і Туреччина. Зауважимо, що в цих країнах, порівняно із країнами "гарячих точок", наявний середній рівень терористичної діяльності (серйозні теракти в Іспанії та Індонезії відбуваються найчастіше – приблизно раз на півтора місяці).

- *Усі вияви терористичної діяльності у країнах*

Із 48 країн, що вивчалися, висунена гіпотеза про експоненційність розподілу інтервалів між терористичними актами була прийнята у 12-ти країнах на всіх досліджуваних рівнях значущості. Це Ангола, Китай, Конго, Велика Британія, Італія, М'янма, Саудівська Аравія, Південна Африка, Судан, Уганда, Сполучені Штати Америки та країни на території колишньої Югославії. Середня частота виникнення терактів у них варіюється доволі сильно – від 38 днів між виявами терористичної діяльності, у середньому, у США – до 136 днів.

- *Значні теракти за терористичними групами*

Із 33 терористичних груп, що взяли відповідальність за серйозні теракти, інтервали між якими відповідають експоненційному закону розподілу, виявилося 15. Серед них такі відомі, як Аль-Каїда, Країна басків і свобода (ЕТА), Хезболльські моджахеди та Робітнича партія Курдистану. Найактивнішим серед усіх виявилося угрупування "Тигри визволення Таміл-Іламу", що скоюють серйозний теракт у середньому за 18 днів. Серед угрупувань, що задовольнили висунену гіпотезу, найбільш активною є UNITA (нині – політична партія Анголи, що була створена на базі повстанського угрупування), яка бере участь у значних терактах майже кожні 20 днів.

▪ *Усі вияви терористичної діяльності за терористичними групами*

Було вивчено діяльність 44 терористичних угрупувань, що здійснювали всі види терористичної діяльності, хоча б і без людських жертв та поранень. Виявилося, що діяльність 20-ти із них цілком відповідає висуненій гіпотезі про показниковість розподілу інтервалів між терактами, що були ними скоєні. Зазначимо відомі терористичні угрупування з цих 20-ти: Аль-Каїда, Країна басків і свобода (ETA), Хезболльські моджахеди, Озброєна ісламістська група та Справжня ірландська республіканська армія (Real IRA).

▪ *Значні теракти, унаслідок яких постраждала певна етнічна група.*

У цьому масиві вибіркових даних не так багато записів. Часто терористичні акти не спрямовані на певну цільову національність, а завдаються для загального знищення інфраструктури регіону або з метою залякування керівних верхівок. Отже, із 33 національностей, що стали жертвами значних терактів, лише сім підпадають під справдження висуненої раніше гіпотези. Це ангольці, індонезійці, серби й чорногорці, іспанці, суданці, турки та мешканці сектору Газа. Найбільше серед них страждають ангольці – теракти проти цієї етнічної групи відбуваються раз на 25 днів. У загальній вибірці найбільш незахищеними від терористичної діяльності є жителі Іраку – теракти проти них відбуваються майже кожні п'ять днів.

▪ *Усі теракти, унаслідок яких постраждала певна етнічна група*

В результаті обробки даних за таким критерієм вибірки ми отримали 47 етнічних груп, що постраждали від терористичної діяльності. Серед них 10 (ангольці, австралійці, китайці, грузини, британці, греки, південноафриканці, суданці, мешканці США та сектору Газа) є такими, теракти над якими підпадають до закономірності експоненційного розподілу. За цим напрямом аналізу найбільш часто страждають громадяни США – раз на 11 днів вони стають ціллю агресивно налаштованих екстремістських терористичних угрупувань. Отже, незважаючи на оголошену владою країни війну з тероризмом, страждають від його виявів найбільше жителі США.

Дуже цікавим є той факт, що у переважної більшості країн кількість терактів, що відбулися протягом тижня або менше, значно перевищують серед більш протяжних інтервалів. Приміром, у 31 (63,3 %) країні із 49-ти досліджених більшість терактів було скоєно на агрегованому до тижневого інтервалі. У трьох державах (Афганістані, Індії та Іраку) на сумарні тижневі інтервали між виявами терористичної діяльності припадає вище 85 % усіх скоєних терактів. Навіть серед тижневого відокремлення особливо виділяються інтервали, що набули значень 0 і 1 день, тобто такі, що відображають теракти, скоєні в один день, або такі, що відбулися протягом двох днів. У середньому вони становлять 43,5 % для одноденного і 63,5 % – для агрегованого одночасного й одноденного показників. Тобто теракти відбуваються переважно серіями, що продовжуються до одного дня.

Згідно з наведеним вище аналізом, це якнайкраще підтверджує його справедливість. Бо терористична діяльність має несподіваний і чітко спланований характер. І за кілька днів після теракту регулярні війська й антитерористичні об'єднання вже пильнуватимуть за багатьма важливими об'єктами – можливими цілями терористів, що заважає скоєнню наступних. Звідси можна дійти висновку про те, що теракти, які відбулися в один день, є такими, що мають високий ступінь залежності та зі стохастичної позиції можуть розглядатися як одинична досліджувана подія. Серії ж терактів як залежні, можуть викликати небажані наслідки та спотворювати результати під час спроби знайти стохастичну модель терористичної діяльності.

Згідно з наведеним вище обґрунтуванням, у роботі ми намагалися зменшити залежність між отриманими вихідними значеннями інтервалів. Тому теракти, що відбулися в один день на одній географічній території, уважалися такими, що є залежними та вилучалися, дублюючи спостереження. Це значно підвищило показники, що позначають справедливість висуненої гіпотези, адже однією з головних властивостей досліджуваного масиву даних має бути стохастичність його вибірки, що погіршується серіями терактів.

Отже, ми можемо зробити такі висновки із проведеного системно-статистичного аналізу як терористичної діяльності взагалі, так і з аналізу реального масиву даних про терористичні акти.

1. Висунені на початку дослідження гіпотези про показниковий тип розподілу інтервалів між терактами як випадкових величин та різні значення оцінок параметрів для вибірок з різних геополітичних зон підтвердилися на основі застосування методологічного апарату оцінок параметрів за методами найменших квадратів і найменшого відхилення, а також критерію згоди Колмогорова-Смирнова та $\chi^2 s$ Пірсона.

Особливо це підтверджується для терористичної діяльності проти США й Іспанії, а також діяльності терористичного угрупування Аль-Каїда і відомого сепаратистського угрупування басків – ЕТА. Тобто цілеспрямована терористична діяльність проти Іспанії та США може успішно застосовувати запропоновану стохастичну модель.

2. Не всі вияви терористичної діяльності за різними її ознаками й напрямами аналізу можна наближати за допомогою експоненційної моделі. Для країн, що отримали статус "гарячої точки", ситуація для прогнозування погіршується великою кількістю взаємозалежних нечисленних терористичних груп, що діють, переважно спонтанно та локально. Але в той самий час не можна не визнати, що багато ключових і важливих аспектів аналізу все-таки можуть бути промодельовані запропонованим чином.

3. Загальну ситуацію стосовно терористичної обстановки у світі можна охарактеризувати таким чином:

а) країни, де ризик скоєння теракту найбільший: Ірак, Індія, Афганістан, Пакистан,…, США;

б) громадяни країн, ризик скоєння теракту проти яких найбільший: Ірак, Індія, Афганістан, … , США;

в) найактивніші терористичні угрупування, що скоїли значні теракти: Талібан, "Тигри визволення Таміл-Іламу", Революційна армія Колумбії, Комуністична партія Індії, Аль-Каїда, …, Країна басків і свобода (ЕТА).

4. У подальших роботах за цією тематикою ми плануємо приділити більше уваги вивченню й виділенню серій терактів, наприклад, використовуючи алгоритми кластеризації даних. Дуже цікавим було б дослідження кластеризованих за кількістю серій ланцюгів-виявів терористичної діяльності, що можуть існувати цілком незалежно один від одного.

5. Терористична діяльність – складний системний об'єкт, що містить багато аспектів, які нелінійно пов'язані один із одним, а також з навколишнім середовищем і містять у собі високій ступінь інформаційної невизначеності, тому їхнє вивчення потребує особливого системного підходу із застосуванням багатьох технік системного аналізу, зокрема таких, що являють собою композицію кількох специфічних методів. Зауважимо недопустимість використання методик аналізу даних без розуміння їхньої структури та внутрішніх взаємозв'язків вихідних даних.

ВИСНОВКИ

У навчальному посібнику наведено аналіз сучасного стану та розвиток основних наявних напрямів теорії прийняття рішень на основі системної оптимізації. Викладено загальну постановку задачі системної оптимізації, загальну схему розв'язання задач системної оптимізації, математичні моделі лінійної задачі системної оптимізації з багатьма критеріями та алгоритмами їхнього розв'язання з різними способами задання цільових установок.

Теоретичні результати проілюстровані для задачі знаходження комплексного оцінювання рівня розвитку організаційної системи як цільової установки. Це було зроблено на основі моделі й алгоритму комплексного оцінювання рівня ефективності регіонального економічного розвитку з урахуванням рівнів розвитку організаційної системи за видами економічної діяльності, що перебувають на кількох рівнях ієрархії, за регіонами для кожного напряму економічної діяльності. Розглянуто алгоритм комплексного оцінювання рівня розвитку організаційної системи, складеної з етапів формування рейтингів регіонів за кожен проміжок часу на основі статистичних даних за всіма сферами економічної діяльності; знаходження відносних рейтингів регіонів за всіма сферами діяльності; знаходження агрегованих відносних рейтингів регіонів за кожним критерієм; визначення агрегованих відносних оцінок рівнів економічного розвитку регіонів для кожної сфери економічної діяльності на основі теорії нечітких множин. Визначено оцінку ступеня ефективності розвитку організаційної системи на основі агрегування попередніх оцінок.

У роботі розглянуто статистичні моделі та алгоритми побудови цільових установок задач підтримки прийняття рішень в області боротьби з терористичними загрозами.

Отримані у розд. 3 результати дозволяють удосконалити процес математичного моделювання при побудові цільових установок у соціально-економічних задачах системної оптимізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бронін С. В. Моделі та інформаційна технологія управління розвитком розподілених ієрархічних систем (на прикладі вищого навчального закладу) : дис. … канд. техн. наук : 05.13.06 / С. В. Бронін. – Х.: Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т", 2007.

2. Годлевский М. Д. Распределённые модели управления развитием вуза / М. Д. Годлевский, С. В. Бронин, О. Ю. Чередниченко // Восточноевропейский журнал передовых технологий. – 2007. – № 1/2(25). – С. 86–91.

3. Доленко Г. О. Системна оптимізація. Прикладні задачі: навч.-метод. посіб. / Г. О. Доленко. – К.: ВПЦ "Київ. ун-т", 2014. – 67 с.

4. Доленко Г. О. Загальна задача управління змінами / Г. О. Доленко, Д. О. Мановицька // Журн. обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3(120). – С. 23–29.

5. Доленко Г. О. Процедури прийняття рішень при управлінні інноваціями: навч.-метод. посіб. / Г. О. Доленко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2009.

6. Доленко Г. А. Методы решения многокритериальных задач оптимизации при изменении области допустимых решений и интервальном задании относительной важности критериев : дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.02 / Г. А. Доленко. – К.: КГУ им. Т. Г. Шевченко, 1983.

7. Доленко Г. О. Приклади застосування процедур стратегічного планування: метод. розробка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2001.

8. Доленко Г. О. Інформаційні технології антикризового управління: навч. посіб. / Г. О. Доленко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.

9. Доленко Г. О. Частичная обратная задача линейного квадратичного программирования / Г. О. Доленко, Д. Я. Хусаинов

// Кибернетика и системный анализ. – 2005. – V. 41. – № 3. – С. 473–478.

10. Доленко Г. О. Методи візуалізації інформації та прийняття рішень: метод. вказівки / Г. О. Доленко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2011.

11. Доленко Г. А. К вопросу системной оптимизации в многокритериальных задачах линейного программирования / В. М. Глушков, В. С. Михалевич, В. Л. Волкович, Г. О. Доленко // Кибернетика. – 1982. – № 3. – С. 4–8.

12. Доленко Г. О. Системная оптимизация в многокритериальных задачах линейного программирования при интервальном задании предпочтений / В. М. Глушков, В. С. Михалевич, В. Л. Волкович, Г. О. Доленко // Кибернетика. – 1983. – № 3. – С. 1–5.

13. Чаплінський Ю. П. Системна оптимізація як методологічна основа оцінки реалізуємості інвестиційних проектів / Ю. П. Чаплінський, А. О. Ширяєв // Економіко-математичне моделювання соціально-економічних систем: зб. наук. пр. – К.: МННЦІТіС, 2003. – Вип. 7. – С. 70–84.

14. Voronin A. Multi-criteria decision making for the management of complex systems / A. Voronin. – USA: IGI Global, 2017.

15. Dolenko G. Fuzzy sets and statistics.Application to evaluation of economic development efficiency / G. Dolenko, D. Manovytska // Model Assisted Statistics and Applications. – 2011. –Vol. 6, № 3. – P. 1–11.

16. Dolenko G. System and statistical approach of analysis and forecasting terrorist activity / Dolenko G., S. Lobach // Model Assisted Statistics and Applications. – 2014. – P. 1–9.

17. Mansmann S. Decision Support System for Managing Educational Capacity Utilization / S. Mansmann, M. H. Scholl // IEEE Transaction and Education. – 2007. – Vol. 50. – № 2. – P. 143–150.

18. Mansmann S. UNICAP: Efficient Decision Support for Academic Resource and Capacity Management / S. Mansmann, M. H. Scholl // IEEE Transactions on Education. – 2005. – P. 235–246.

19. www.ukrstat.gov.ua

20. http://www.minfin.gov.ua

21. http://www.kmu.gov.ua

22. http://www.sta.gov.ua/control/uk/index

Навчальне видання

Доленко Галина Олександрівна

Прикладні проблеми теорії прийняття рішень

Навчальний посібник

Редактор *І. А. Кирницька*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"
Виконавець *В. Гаркуша*

Формат $60x84^{1/16}$. Ум. друк. арк. 5,58. Наклад 100. Зам. № 223-10790.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К6.
Підписано до друку 22.12.23

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 58; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02